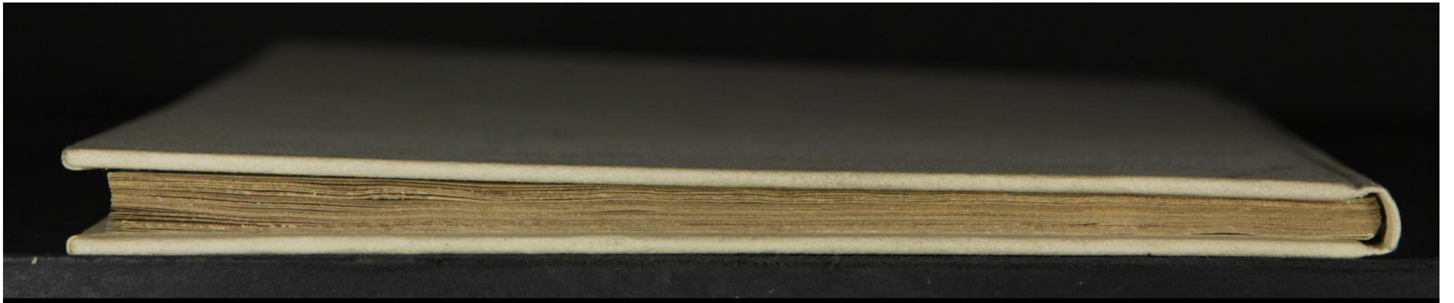

1
7
192


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.192





SVPPLEMENTI FRANCISCI VIETÆ, AC GEOMETRIÆ TOTIVS INSTAVRATIO.

Authore

A. S. L.





PARISIIS,
Apud PETRVM DES-HAYES, viâ Citharœdicâ, ſub Roſâ Rubrâ.

M. DC. XLIIII.

Cum Privilegio Regis.



ILLVSTRISSIMO IOAN. BAPT. AYROLO PATRITIO GENVENSI,

CONSTANTIVS SILANIVS NICENVS

S. P. D.



VÆ de Gustus naturâ à Philosopho dicta fuere, detorquêri quoque ad majores animæ vires posse, nullus est qui dubitet; Aliquibus nempe Disciplinæ quædam cordi sunt, quas minimè tamen cæteris allúbere certum est: Atque eo in censu Mathematicas Demonstrationes esse, Experientiâ constat; siue quòd præ nimiâ difficultate vulgares animos à sui cognitione submoueant; siue quòd Principum auctoritate solâ crescant, eorumque vice versâ commodis, ac belli, pacisque rebus promouendis potius, quàm Priuatorum studijs inseruire poßint. Isti siquidem quoties bella decernunt, exercitúsve conscribunt, Mathematici Radij

officium adunare cum Sceptris consueuêrunt. Imò verò quando armorum furore cuncta perstrepunt, & Regiones integræ flammis; Urbes verò cuniculis fulminalibus, ferro devastantur: tunc potißimùm aliquam Matheseos partem augeri majorem in modum, atque velut ex occultâ meditatione in hominum lucem, suis potißimùm operibus admirandis, erumpere conspicuum est. Cæterùm nullo negotio cognosci faciliùs potest, quantùm illi ab hominum studijs incrementi accesserit, quàm si ea quæ nostris temporibus subtiliter excogitata fuêrunt cum Veterum inventis conferantur: Verùm quoniam non pauca hùc vsque in Geometrico pulvere occulta latent, quæ, quivis Priscorum vestigijs insistens, velut è latebris in apertam hominum lucem proferre frustrà tentârit; Ego propterea sæpius apud me perpendi, num aliqua daretur via, quam ingressus, possem ejusmodi nodos Marte proprio dissolvere, & Mathesin ex Instaurato Magni Vietæ Supplemento, nobiliorem, auctioremque facere. Quod mihi cum ex voto penitus acciderit, existimaui etiam, quicquid illud tandem foret, omni jure Tibi, VIR ILLVSTRISSIME, deberi à me; tum quia rerum istarum Peritißimus es; cum etiam quia præter Honores, ac Magistratus, quos in Augustißimâ Republicâ Tuâ Amplißimos sustines, Virtutum insuper præstantißimarum, ac humanitatis præsertim, singularísque morum suauitatis ornamenta Tibi comparasti. Quàmobrem nisi meum istud Inventum Tibi custodiendum obtulerim, parum

certè, vel Authoritatem Tuam agnovisse, quæ sola meis paginis vitam perennem conciliare potest, aut perveteri meæ in Te obseruantiæ, conveniēter fecisse videar. Tuum est igitur munusculum istud, quod Tibi magnâ oblatum esse animi propensione non ignoras, pari benignitatis affectu suscipere, méque non tam inversi & mutati nominis reum, quàm gratiæ, & officiorum, humanitatisque Tuæ compotem facere; quemadmodum sanè te facturum esse mihi pro certo persuasi. Vale. Prid. Id. Iul. M. DC. XLIII.

Summa Privilegij Regij.

LVDOVICI XIV. Galliarum, & Navarræ Regis Diplomate cautum eſt, ne quis in ipſius Regnis, aliíſve Locis ejus Ditioni ſubjectis, intra proximos Annos quinque à Die primæ impreſſionis inchoandos, excudat, vendat; excudendum, vendendumque quovis modo, ac ratione curet, Librum qui inſcribitur, *Supplementi Franciſci Vietæ, ac Geometriæ totius Inſtauratio*, *Authore* A. S. L. per Extraneos, aut aliâ quâcunque viâ Editionem procurando, præter illius Libri Authorem, aut illos quibus ipſe conceſſerit. Idque prohibitum ſub pœnâ 3000. Librarum Turonenſium, & alijs Originali Diplomate contra delinquentes expreſſis. Datum Pariſijs Die Decimâ-tertiâ Nouembris, Anno Domini 1643. Ex Mandato Regis, Cancellatum, & Signatum, LE BRVN; necnon Sigillo Magno Regio munitum.

ABſoluta eſt Prima Editio, die ultimâ Ianuarij 1644. à PETRO DES-HAYES Typographo, & Bibliopolâ Pariſienſi; cui ab Authore conceſſa eſt facultas Librum cudendi, vendendíque per tempus Priuilegio Regio latum.

ERRATA.

PAginâ 4. Lineâ 16. Lege, oſcitantiâ. P. 7. l. 20. Vt, lege, Sit. P. 8. l. 10. lege, concurſus. l. 18. DH. lege, FH. P. 16. l. 11. lege, iunctaque BI, bifariàm. P. 17. l. 2. Dele, DO. P. 17. & 18. in vtroque Schemate, Duc lineam ab A, ad D. P. 18. l. vltimâ, N. lege, G. P. 19. l. 8. N. lege, G. P. 21. l. 5. lege, conſtrui non poterant. l. 22. lege, *Angulum*. P. 31. l. 18. + ABQ. 20. lege, — ABQ. 20. P. 46. l. 3. lege, aut G δ, Parallela. P. 51, l. 24. lege, Anguli ACB. P. 54. l. 5. lege, ſunt EHI, EIH. P. 55. l. 20. lege, Æquali. P. 57. l. 3. lege, Algebræ. l. 8. PO. lege, HI. l. 14. lege, conveniens. P. 64. l. 13. opus ſit. lege, debet.



SVPPLEMENTI FRANCISCI VIETÆ, AC GEOMETRIÆ TOTIVS INSTAVRATIO.

NVLLAM in Literarum Republicâ jacturam contingere posse maiorem illâ, quàm si Rerum preteritarum Monumenta depereant (quùm nullo deinceps instaurari ingenio possint) adeò manifestum censetur ab omnibus, vt prolixâ non oporteat vti probatione: In reliquis verò Disciplinis, & si ad tempus, aut penitùs, aliqua amittantur; successu tamen seculorum reparari, ac elegantiori educi formâ haud rarò conspiciuntur: Natura etenim vno non ita exhauritur, quin alia, etiam potiora innouare ac educere queat: immò, & quò magis progreditur, semper ad aliquid inueniendum aptiora producit ingenia. In Argumento sanè à nobis susceptо id habemus; ex eo quòd in Collectaneis Mathematum Pappi indicata vix sint aliqua, Magno illi Apollonio Pergęo adscripta: quæ an aliquando extiterint, haud liquet: vel temporum voracitas nobis abstulit. Post igitur tot annorum curricula, ad nostra vsque tempora, Nobiles

Mathematatum Cultores ad eadem è tenebris educenda ſe conuerterunt. Quorum primus, alter verè Magnus Apollonius, fuit Franciſcus Vieta Gallus, qui Περὶ ἐπαφῶν, ſiue de Tactionibus Libellum ſuſcitauit (At ratione ſanè puerilia hæc quis dixerit, ſi ad ea quæ ille Marte ſuo nobis donauit, id eſt vniuerſam ditauit Matheſin.) Ordine deinde temporis Geometra valde acutus ſucceſſit ex Batauiâ feraci VVillebrordus Snellius, qui Περὶ διωρισμένης τομῆς, ſiue De Sectione Determinatâ Opuſculũ: & inſuper Περὶ λόγου; & Περὶ χωρίου ἀποτομῆς: ſiue de Rationis, ac de Spatii Sectione evulgauit alia. Deinde Marinus Ghetaldus Geometra & Analyſta inſignis ex Illyrico, Περὶ νεύσεων, ſiue de Inclinationibus duobus Libris Apollonium Rediuivum adduxit. Hiſce iure omni, debet Alexander Anderſonus Scotus accenſeri, qui verè ingenio non vulgari, eiuſdem Apollonij quædam inueſtigauit Problemata; at eo in ætate florenti intercepto, plura nondum edita quæ conceperat, lucem obtinere nequiuerunt. Erunt fortaſſe, & alii, quorum labores noſtras præterierunt manus. Omnibus, ſi tempore poſterior, indaginis tamen ſubtilitate ex Primis, Renatus Des-Cartes Gallus, cui tanta fuit in vno abſoluendo Problemate cura, vt quod non Euclidi, nec Apollonio, nec Aliis (eodem in Septimo Libro Pappo referente) licuit; ille maximâ dexteritate reſolutum dedit. An verò in Analyticis penes Antiquos Ars progreſſa haberetur; quantùm deinde beneficio Specioſæ Logiſtices à Vieta inuentæ, credendum non erit facile: & aliorum eſto iudicium. Satis itaque, vt mihi videtur, oſtenſum fuerit nunquam deeſſe Naturam ad excitandum; & ſi in cæteris oporteret excurrere Facultatibus, ampliùs cõſtaret ingenia produci: ſed foret id præter aſſumptum. Silentio in-

terim inuolui non debet, per manus Profeſſorum Exemplar Manuſcriptum vagari (& nobis conceſſum fuerat) Opuſculi eiuſdem Apollonij de Locis Planis à D. Petro Fermatio Gallo in Tholoſanâ Aulâ Conſiliario eleganter reſtitutum: à quo tum de Locis Solidis expectabunt Studioſi vt publici fiat juris; quòd à nemine, inuito, aut inconſulto authore, debeat promulgari. Duo erãt deinde, quæ ad integrandam Geometriam maximè pertinebant omni ſeculo deſiderata Problemata: Et quia intra limites conſtruere proprios non licuit, ad varia Antiqui ſe conuerterunt molimina, vt quoquo modo ſupplerentur; Alii per Lineare; Alii per Mechanicum; Alii verò per Solidum genus tradiderunt; hoc eſt, Quomodo, Inter duas Lineas Extremas, duæ Mediæ in Analogiâ Cõtinuâ collocandæ eſſent; Et vnum erat Problematum. Alterum verò, Quomodo Angulum quemlibet Rectilineum Æqualiter Trifariam ſecari oporteret. Hæc duo plurimorum contorſerunt ingenia, & adeò per impropria abſolui genera à quibuſdam ex Neotericis malè audierat, vt Vieta in ſuo Geometriæ Supplemento, minus committi cenſuit, ſi relictis illis, ad implorandum nouum Poſtulatum deueniretur: Quod erat huiuſmodi; A quovis Puncto, ad duas quaſvis Lineas Rectam ducere interceptam, ab ijs præfinito poſſibili quocumque Interſegmẽto. Et hoc videlicet erat vtcumque, illa duo, & alia Problemata per aliquam Conceſſionem expedire: Adeò vt Anguli Triſectio deduceretur ad Problema aliud, De inſerendo Lineam Datam inter eductam Diametrũ, & Conuexam eiuſdem Circuli Peripheriam. Poſtulatum deinde illud à nonnullis receptum, vt ferè ab anno 1593. quo Turoni ediderat Vieta Supplementum Geometriæ, decurſu ferè quinquaginta annorum à nemine ſit

reprobatum. Immò Petrus Herigonius Gallus, Scriptor elegantiſſimus, poſt abſolutũ ſuum in Stadio Mathematum Curſum, in Appendice, ſiue Supplemento ad Algebram, ſtatim in Veſtibulo illud renouat, & aliqua ſuæ adaptat Problemata Methodo: vnde manifeſtè patet vſque ad annum 1642. quo Pariſijs editum illud eſt, receptum fuiſſe. Ita vt Dauid Riualtus Gallus in ſuo adornato Archimede paulò antè, aliquos Authorũ defectus excuſaſſe rationabiliter videretur: In calce namque Libri Secundi de Sphęra, & Cylindro, hæc adnotata inuenimus. Problema Deliacum in quod incidit Propoſitio Prima huius Secundi Libri non ſoluere, neutiquam, quocumque ſæculo pudori fuit vlli Geometrarum, &c.

Sed vt quod verum eſt aſſeratur, Poſtulatum eiuſmodi nunquam Geometria purior conceſſit: neque, authoritate Riualti, Authores excuſari queunt, vt eorum oſciſtantiâ in ipſammet facultatem Defectus rejicerentur.

Et quum iam facili negotio per propria, ac germana Principia, hæc, & plura alia Problemata mihi viſum fuerit demonſtrari poſſe: Igitur nuncio omnibus machinamentis Antiquorum remiſſo, ac ſimul Vietæo Poſtulato expulſo, illa nos conſtruere aggredimur: ijs tantùm, quæ Communis Euclidea Schola amplectitur, admiſſis Principijs.

Opuſculi itaque huius, Ordo erit;

Vt per aliquot Problemata doceatur, Quo pacto legitimè Data Recta Linea inter Conuexum Peripheriæ, & eiuſdem Circuli eductam Diametrum aptari poſſit, vt ad Datum pertineat Punctum.

Deinde breuiter conſtruentur duo Problemata à Marino Ghetaldo inſoluta, in ſuo Variorum relicta.

Poſtea Diuiſio Tripartita Anguli cuiuslibet ſuccedet Plani.

Iſtis adnectentur aliqua Problemata Vietæ in Supplemento, & reſtituta per germanam conſtructionem dabuntur: Et ita totum illud Supplementum intra leges Geometricas, transferemus.

Heptagonum poſtea efformare monſtrabimus, non vnicâ Methodo. Similiter & Enneagonus delineabitur.

Vlteriùs Nouâ ac Generali formâ, non tantùm Angulus Rectilineus Tripartitò, ſed Quintù, & Septufariam; imò in quauis aliâ Ratione in quâ Circulum diuiſiſſe conſtabit, dirimetur Geometricè.

Præterea Duas Medias inter Extremas in ſerie Quatuor Linearum inuenire docebimus per Plana, Geometricè: Vnde reſultabit ipſamet efformatio Cubi in quacumque Ratione proponatur; Quod erit verè per Plana Antiquum illud, ac Famoſum Problema abſoluere.

Et paucis additis finem Opuſculi faciemus.



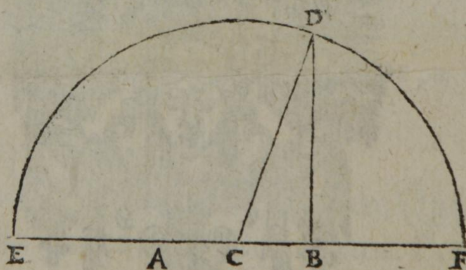


LEMMA PRIMVM.

Datâ Lineâ Mediâ, & Extremarum Differentiâ in serie Trium Proportionalium; inuenire Extremas.



SIT Linea AB Differentia duarum Extremarum, & Media BD, Oporteat inuenire Extremas. Diuidatur AB bifariam in C, & in altero Extremorum nempe B, ad Angulos Rectos ponatur BD, iunctaque CD fiat Semidiameter Circuli, & scribatur EDF, ad cuius Peripheriam producatur AB in E & F, Iam ex Elementis habetur, quòd Lineæ EB, BD, BF, in Continua sint Analogia. Et cùm EC, CF, Semidiametri, Æquales sint:



Sic & Æquales AC, CB, factæ erunt residuæ etiam EA, BF, Pares. Ideò Differentia Extremarum eadem redit AB, & Extremæ inuentæ EB, BF. Quod erat faciendum.

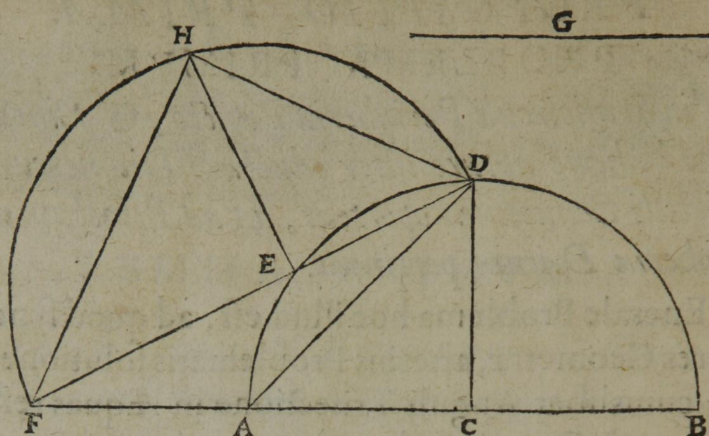
PROPOSITIO PRIMA.

PROBLEMA PRIMVM.

Dato in Semicirculi Peripheria Puncto, & Lineâ Externâ, hanc aptare inter eductam Diametrum, & Circuli Conuexum oporteat, vt ad Punctum in Peripheria Datum pertineat.

GEnerale Problema hoc illud eſt, ad quod ſyncerio-res Geometræ, alterius Problematis ſolutionem, de Plani cuiuslibet Anguli Triſectione in Æquas referunt partes, vt à Generibus longè extraneis permixtam expurgarent Geometriam.

Habet itaque Symptomata non pauca, quorum opportuna magis, vt perſpicaciùs concipiantur, per diſtincta nos afferemus Problemata. Cæterùm deinceps Methodo prorſus diuerſâ, Anguli Plani Triſectionem, & vlteriùs demonſtraturi. Problema itaque vt proponitur, diuerſificari ex Datis poteſt: vel quia Externa Linea maior, minor, aut æqualis exponatur Semidiametro Circuli, & aſſignatum in Peripheria Punctum in vertice Quadrantis, citrà, vel vltrà cadere poteſt. Vt primo loco in dato Semicirculo ABD, Punctum in Quadrantis vertice D, & Li-



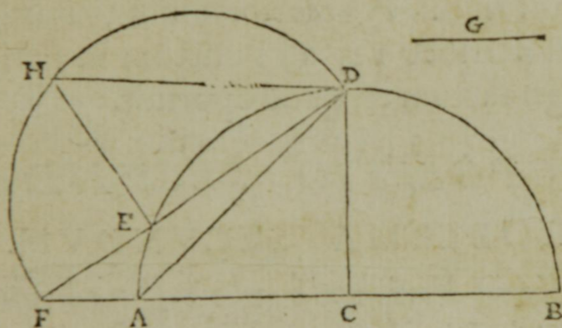
nea Externa G, maior, aut minor Semidiametro: oporteatque à Puncto D, Lineam ducere, ita vt conueniens cum BA educta Diametro, pars illa quæ erit à Convexo Circuli intercepta, fiat æqualis Datę Lineę Externæ G. Ducatur Linea AD, & hæc ponatur, vt Media inter duas Extremas, quarum Differentia statuatur Linea Data G, & per Lemma præmissum inueniantur Extremæ, sitque Maior DF, Minor DE, & à Puncto D, ducatur Linea DF donec concurrat cum BA. Sit conversus in F, (quòd autem conueniant necesse est, nam Angulus FCD Rectus, est FDC Recto minor) & super DF, scribatur Semicirculus, in quo ponatur FH Linea æqualis Lineæ tangenti à puncto F, Circulum ADB, & iunctis HE, DH. Dico quòd FE Linea est Æqualis Datæ Externæ G. In Semicirculo namque FHD, Angulus H Rectus est, & duo Rectangula DFE, & FDE, æquantur DF Quadrato. Sed Rectangulũ DFE æquatur Quadrato Lineæ DH. Ergo reliquum Quadratum DH, Æquale remanet reliquo Rectangulo FDE, & idem Rectangulum FDE, Æquale fuerat Quadrato Lineæ AD. Ergo, & Lineæ AD, DH sunt Æquales, & tres Lineæ Proportionales

FD,

FD, DH, DE. Quare duo Triangula, quæ habent circa eumdem Angulum FDH Latera Proportionalia, nempe Triangulum FDH, & Triangulum DHE, erunt Æquiangula & Similia, & cùm in Triangulo FDH, Angulus FHD ſit Rectus, & alter Angulus in Triangulo DHE huic Relatiuus, Rectus erit, ſcilicet Angulus DEH. Ergò Trium Proportionalium Extremæ, ſunt FD, DE; Et illarum Differentia fit FE. At earundem Extremarum Differentia in Conſtructione, fuerat Linea G. Ideò FE, & G, erunt Æquales. At FE, pertinet ad Datum Punctum in Circumferentiâ D. Et factum erit quod oportuit.

ALITER.

IN conſimili Schemate, & iiſdem ſuppoſitis, pro Conſtructione, quoniam Rectangulum BFA, vnà cum



Quadrato AC, eſt Æquale Quadrato FC; ſi vtriſque addatur DC Quadratum, erit Rectangulum BFA, cum duobus Quadratis AC, CD, hoc eſt, Quadrato AD, Æquale Quadratis FC, CD, id eſt Quadrato FD, Aut, per interpretationem, duobus Rectangulis DFE, FDE. Sed Rectangulum FDE, Æquale, ex Conſtructione, eſt Quadratis duobus AC, CD, ſiue vni Quadrato AD. Ergò

Rectangulum FDE, constabit ex Extremis Proportionalibus, quarum DA, Media est. Ideò FD, DA, DE, Proportionales, & Extremarum Differentia fit FE, quæ intercipitur à Convexo Peripheriæ, & Diametro eductâ. Sed earumdem Extremarum Differentia fuerat, ex Constructione, Externa Data G. Ergò FE, & ipsa G, Æquales sunt. Conueniunt namque ambo ad integrandam Analogiam Trium Proportionalium, stante Mediâ eâdem. Sed pertinet FE, ad Punctum in Peripheriâ D Datum. Ergo factum est quod oportuit.

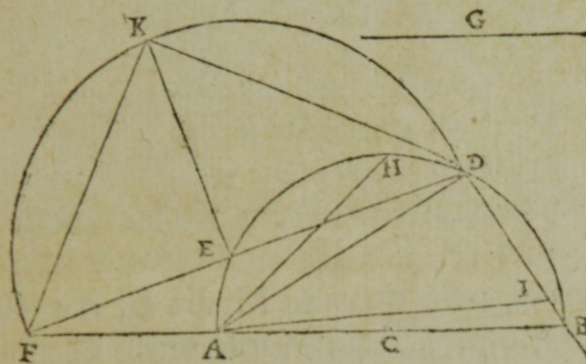
PROPOSITIO SECVNDA.

PROBLEMA SECVNDVM.

Dato Puncto in Peripheriâ vltra Quadrantis Verticem, & Lineâ Externâ, quæ iterùm sit Semidiametro Major, illud idem efficere.

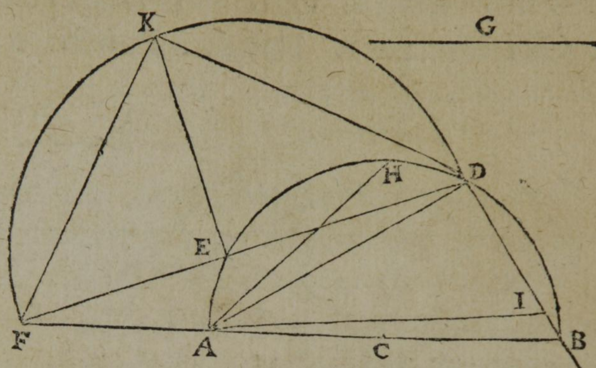
SIT Semicirculus ADB, in eo Punctum D, Linea Externa G Major Semidiametro AC. Accipiatur in Quadrantis Vertice Punctum H, & ducatur AH, ejusque Quadratum à Quadrato junctæ AD auferatur, vt sit illorum Differentia, quòd possit Linea DI, quæ ad

Rectos Angulos ponenda eſt ſuper AD, & iuncta AI, hæc Media fiat inter Extremas, quarum Differentia ſit Linea Externa Data G, Inuentiſque Extremis, Major ſit DF; Minor DE. A Puncto deinde D, Linea ducatur DF, donec in Diametrum BA productam occurrat; & ſit Concurſus in Puncto F. Circa DF Diametrum deſcriptus eat Circulus DKF. Poſteà à Puncto F intelli-



gatur ad Semicirculum ducta Linea Tangens, quæ ſit Æqualis FK. Ducantur deinceps KE, DK. Dico quòd Portio Lineæ DF, ſcilicet FE, quæ cadit inter Peripheriæ ADB Convexum, & eiuſdem Circuli Diametrum, Æqualis erit Datæ Lineæ G Externæ. Quoniam FK, Æqualis eſt Tangenti Circulum AD. à Puncto F, eius Quadratum Æquale erit Rectangulo DFE. Sed hoc Rectangulum vnà cum altero FDE Rectangulo, ſunt Quadratum DF, Et hoc Æquatur duobus Quadratis FK, DK. Igitur Quadratum DK, Æquale fiet Rectangulo FDE. At Rectangulum FDE, Æquale fuit factum Quadrato AI. Ergò AI Quadratum, Æquale ſit Quadrato DK; Et Linea Lineæ. Vnde Tres erunt Lineæ Proportionales FD, DK, DE, quæ in duobus Triangulis DFK, DEK, circa eundem Angulum FDK conſiſtunt.

Ergò Triangula illa ſunt Similia, & Æquiangula. In Triangulo verò F D K, Angulus in Semicirculo Rectus eſt; Ideò in altero Triangulo D K E, eius Correlatiuus D E K, Rectus erit. Linea igitur K E, perpendiculariter ſuper D F, in Puncto E cadit. Et Linea F E, ſit Differentia Ex-



tremarum F D, D E, quarum Media eſt D K, ſiue A I. At in Conſtructione, Linea G, Differentia illarum aſſumebatur. Igitur G, & F E, Æquales ſunt. Pertinet verò F E, ad Punctum in Peripheriâ D, Datum. Et hoc erat faciendum.

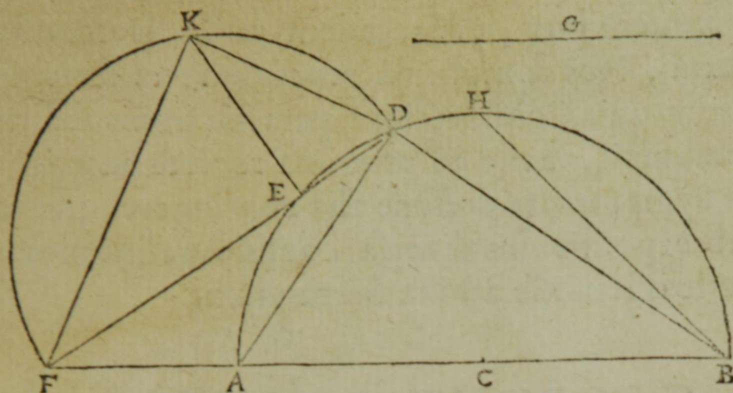
PROPOSITIO TERTIA.

PROBLEMA TERTIVM.

Dato Puncto in Peripheriâ Circuli citra Quadrantis Verticem, & Lineâ Externâ, quæ ſit adhùc Semidiametro Maior, illud idem efficere.

SIT Semicirculus, in eo Punctum D, citra Verticem Quadrantis, & Linea Externa G, Maior Semidiametro A C. Ducatur A D, Et in H, bifariam Semicirculus diuidatur, iunctáque Linea B H, ſumatur Differentia Quadratorum B H, A D, & ſit quod poteſt Linea D K, quæ Media accipiatur Trium Proportionalium, quarum

Differentia Extremarum fiat G Externa Data; Inuentisque Extremis ex Lemmate, sit Maior DF: Minor DE:



Et à Puncto D, in Semicirculo Dato ducatur DF, vt concurrat cum protractâ Diametro BA, & in F Puncto sit concursus.

Dico quòd FE eius pars inter Conuexum Peripheriæ, & Diametrum eductam, Æqualis est Datæ Externæ G, Demonstratio prorsus fiet vt suprà, quam etiam repetere non piget. Circa DF, Semicirculus eat, & FK Æquetur Lineæ Tangenti à Puncto F, Circulum ADB. Ideò Tres sunt Proportionales DF, FK, FE, & Rectangulum FDE, potest etiam Quadratum DK. Sic iterum in Analogiâ sunt FD, DK, DE. Quare in Triangulis FDK, DKE, cùm Proportionales sint circa eundem Angulum FDK, sunt Similia, & Æquiangula Triangula. Et idcircò Angulus DEK Rectus, & Trium Proportionalium FD, DK, DE, Differentia Extremarum est FE Externa, & pertinens ad Punctum Datum D. Sed eadem Differentia erat in Constructione, Linea G. Ergò Æquales euadunt Lineæ FE, & G. Et factum erit quod oportuit.

ADNOTATIO.

IN ſequentibus, cùm eadem poſſit Demonſtratio inſtitui, Nos à multiplâ repetitione abſtinebimus; præſertim quia Conſtructione peractâ, ſiquis illâ rurſus opus habuerit, facilè ad præmiſſa regredi poterit. Cæterùm Symptomata poſſunt alia contingere, quæ vt parùm ab expoſitis ſint diuerſa, conſultò relinquimus; & ſat fuerit oſtendiſſe ad illa Methodum.

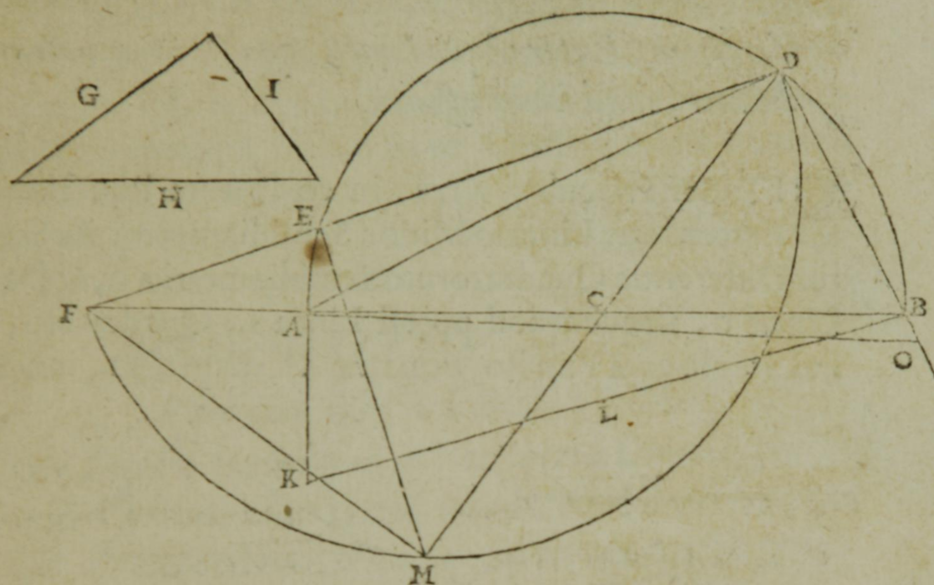
PROPOSITIO QVARTA.

PROBLEMA QVARTVM.

Dato in Peripheriâ Puncto vltra Quadrantis Verticem, & Lineâ Externâ, quæ ſit Semidiametro Minor, illud idem efficere.

SIT Semicirculus ADB: Punctum in Peripheriâ Datum D; Et Externa Linea Semidiametro Minor G. Sumatur Quadrati Semidiametri, ſuper Quadrato Lineæ G, Differentia; Et ſit Quadratum quod poſſit Linea I, quæ ad Angulos Rectos ſuper Diametro in A Puncto ponatur: ſitque AK, iunctáque KB, diuidatur in L bifariam, & duo Quadrata KL, vel BL, à Quadrato Lineæ AD (priùs ductæ) auferantur, vt Differentia Quadratorum fiat, id quod poteſt Linea DO. Et hæc ad Rectos Angulos ponatur ſuper AD; ſi opus fuerit DB prorogetur. Poſteà iungatur AO, quæ quidem vt Media accipiatur inter Extremas in ordine Trium Pro-

portionalium, quarum Extremarum Differentia ſit G Data. Inuentiſque Extremis, Maior ſit D F, Minor verò



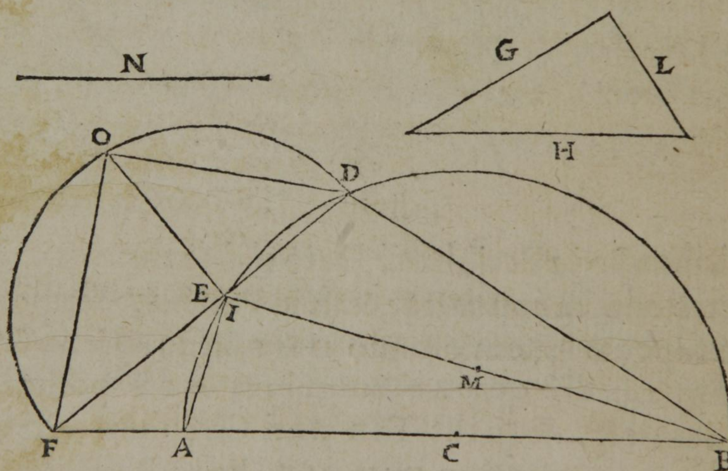
D E: Et à Puncto in Peripheriâ Dato D, ducatur D F, vt cum Diametro eductâ concurrat, & ſit in Puncto F, ſcriptoque deinde ſuper D F, Semicirculo D M F, in eo aptetur Linea F M, Æqualis illi quæ Rectangulum D F E poſſit: aut quod idem eſt, Æqualis Tangenti Circulum A D B, ex Puncto F, iunganturque D M, M E. Ergò Rectangulum D F E, Æquatur Quadrato F M. Et Quadratum D M, Rectangulo F D E. Igitur, vt ſuprà, oſtendetur M E, ſuper D F, ad Angulos Pares deſcendere. Et eâdem peractâ ratiocinatione, Methodo ſuperiori concludatur, F E Æqualem Datæ G, pertinentem ad Punctum D in Peripheriâ Datum. Et factum erit quod oportuit.

PROPOSITIO QVINTA.

PROBLEMA QVINTVM.

Dato Puncto in Peripheriâ Circuli citra Quadrantis Verticem, Externâque Lineâ, quæ sit Semidiametro Minor, illud idem efficere.

SIT Semicirculus ADB, in eo Datum Punctum D, Externáque Linea G Minor Semidiametro. Accipiatur Differentia Quadratorum Semidiametri AC, & Datæ Lineæ G, ſitque quod poteſt Linea L Quadratum, & in Circulo ex A Puncto, ponatur AI, Æqualis L, iunctá-



que bifariam in M diuidatur, & Duplum Quadrati BM, aut MI auferatur à Quadrato BD, vt Differentia fiat Quadratorum, quod Linea N poſſit, & hæc Linea N ponatur Media Trium Proportionalium, quarum Differentia Extremarum fiat Data G. Inuentiſque Extremis, Major ſit DF, Minor verò DE, & à Puncto D, ducatur DF in concurſum eductæ Diametri BA, & in

Puncto

Puncto conueniant F, ſupraque DF, eat Semicirculus in quo Linea DO accommodetur, Æqualis FO, quæ ſit potens Rectangulum BAF, ſiue ex F Puncto, illa quæ Circulum ADB tangit, & ducantur aliæ DO, EO; & facto, vt ſuprà, eodem diſcurſu, Concluſio eadem reſultabit; ſcilicet DO Mediam fieri inter DF, & DE, Ergò Æqualem ipſi N. Et cùm Linea G, ſit Differentia earumdem Extremarum FD, DE; ex Conſtructione quarum pariter Differentia eſt FE. Ergò G adplicata eſt vt petebatur, pertingens ad Punctum in Peripheriâ Datum D. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO SEXTA.

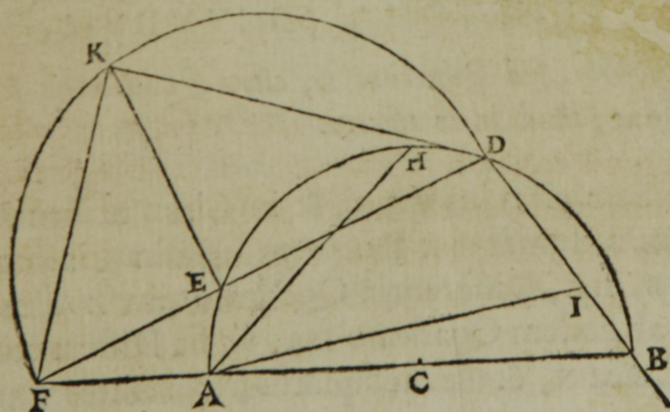
PROBLEMA SEXTVM.

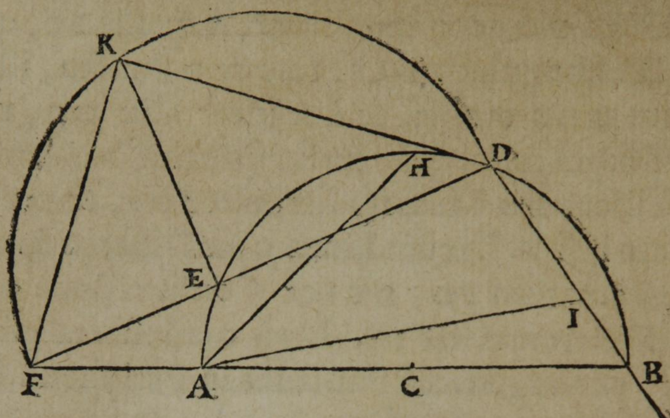
Dato Puncto vtcumque in Peripheriâ Circuli, ſiue in ipſo Vertice, Citrà, vel vltrà; & Linea Externa ſit Semidiametro Æqualis, illud idem efficere.

SYMPTOMA PRIMVM.

Sit Primum Punctum D, *vltra Quadrantis Verticem.*

AGatur Linea AD, & jungatur DB quantùm opus fuerit; ſectaque bifariàm in H Peripheria, ducatur



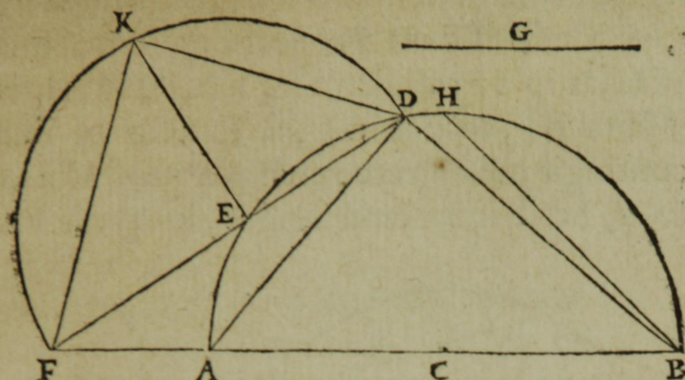


AH, & Differentia AD, AH Quadratorum illa ſit, quæ poſſit DI, quæ & ponatur ſuper AD ad Angulos Rectos in DI; iuncta deinde AI, hæc erit ponenda tanquam Media Trium Linearũ Proportionalium, quarum Differentia Extremarum, fiat in hoc caſu ſemper Semidiameter Data AC, vt in Hypotheſi, inueniantur de more Extremæ, & Major ſit DF, Minor DE; Cætera verò ſunt ordinanda vt ſuprà; Et eâdem ratiocinatione Concludetur AI, Æqualem DK, & Differentiam Extremarum DF, DE, ſcilicet FE, Æqualem fieri ipſi G, ſiue Semidiametro AC. Quod erat propoſitum.

SYMPTOMA SECVNDVM.

Iiſdem poſitis, ſed Punctum D, *citra Quadrantis Verticem conſiſtat, illud idem efficere.*

SIT Semicirculus ADB, & in Circumferentiâ Punctum D, ſumatur H Punctum Quadrantis; Et ductis AD, DB, HB, Differentia Quadratorum DA, HB, auferatur ab eodem Quadrato DA, vt ſit Differentia, quæ poſſit Linea N, & hæc accipiatur Media inter Duas Ex-

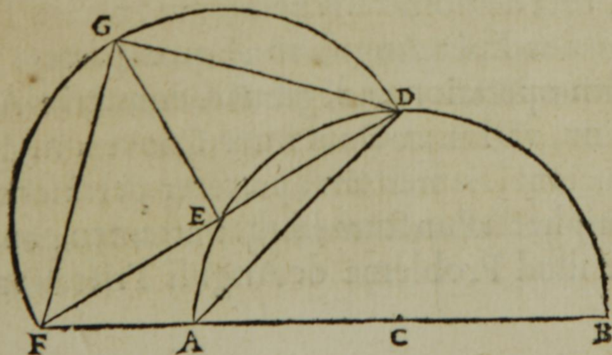


tremas, Differentia quarum ſit A C Semidiameter; inuentiſque Extremis, Maior ſit D F, Minor D E, Et à Puncto D, ducatur D F, vt cum productâ B A, conueniat in F Puncto, & circa D F Circuli Semiſſis ſcribatur, in quo aptetur F K, Æqualis tangenti Circulum A D B, ex eodem F Puncto, Et ducantur D K, K E, quæ vera ſunt reliqua ordinanda: Et argumentandum vt ſuprà, Concludetur N, Æqualem D K: Et F E Differentiam Extremarum D F, D E, Æquari Semidiametro A C. Quod erat propoſitum.

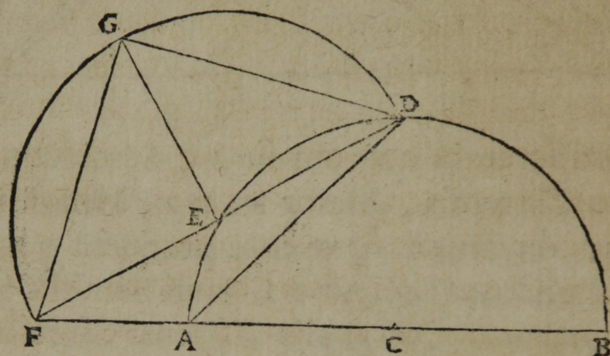
SYMPTOMA TERTIVM.

Iiſdem vt ſuprà poſitis, & Punctum D, *in Vertice conſiſtat Quadrantis, illud idem efficere.*

SIT Semicirculus A D B, in eo Punctum D, & Linea



Externa Æqualis Semidiametro AC, jungatur AD, quæ ponatur, vt Media Trium Proportionalium, quarum Differentia fiat ipſa Semidiameter AC, & inuentis Extremis, Major DF, Minor DE, à Puncto D, ducatur DF, vt contingit concurrere, cum BA productâ, & ſit in Puncto F; Scribatur Semicirculus, in quo à Puncto



F ducatur, ſiue aptetur Linea FG, Æqualis Lineæ Tangenti Circulum ADB, ab eodem Puncto F, Et ducantur DG, GE: Ex eâdem igitur pluries repetitâ formâ argumentandi, Concludetur DG Æqualem AD, & Differentiam FE Extremarum, Æqualem ipſi AC Semidiametro. Et hoc erat faciendum.

ADNOTATIO.

PAVCA hæc ſufficere poſſent, vt Methodo Geometricâ, tota demonſtraretur integra effectio Triſectionis Plani cuius-libet Anguli in Æquas partes: Nam in hac tantùm operatione à legibus Geometriæ Authores declinabant, vt Linea Data inter Convexum Peripheriæ, & eductam Diametrum aptaretur pertinens ad Datum in Peripheriâ Punctum; Libet attamen, antequàm principale illud Problema de Anguli Triſectione à no-

bis proponatur, ſolutionem afferre ad duo Quæſita, & inſoluta Problemata à Marino Ghetaldo in ſuo Variorum relicta; quæ quidem nec ipſe, qui poſt eadem evulgata, ſuperfuit ad quadrantem Seculi; nec quiſquam aliorum ſoluit: Et ſanè ex tunc Datis conſtrui poterant. Nunc verò ex ſuperiùs à nobis deductis nullo negotio perficientur.

In Libro igitur variorum Problematum Ghetaldi Venetijs Anno 1607. edito, poſt xviij, ac xix. Problemata in Recto Angulo feliciter abſoluta, ad illud quod generaliùs conceperat. Nimirùm illa eadem ſub quocumque Angulo conſtruenda cùm explere nequiret, & hoc valde optaret, in hæc verba deſcendit.

Magni momenti eſſent duo Problemata proximè præcedentia, ſi in omni Triangulo, non in Rectangulo tantùm, conſtruerentur; Primum enim oportunum eſſet ad Sectionem Anguli cujuslibet Plani, vel Circumferentiæ in tres partes Æquales. Secundum verò ad Duplicationem Cubi, proponerenturque illa duo Problemata hoc modo.

PRIMVM. *Dato vno ex Lateribus Trianguli Datum Angulum Verticis ambientibus, Datâque Differentiâ Segmentorum Baſis, inuenire Triangulum.*

SECVNDVM. *Dato vno ex Lateribus Trianguli Datum Angulum Verticis ambientibus, Datoque alterno Baſis Segmento,, inuenire Triangulum.*

Si hæc Problemata conſtruerentur, Secaretur, vt diximus, quilibet Angulus Rectilineus, vel Circumferentia Trifariàm, Duplicaretur Cubus, atque Geometriæ ſupplerentur Defectus. Hæc Ghetaldus.

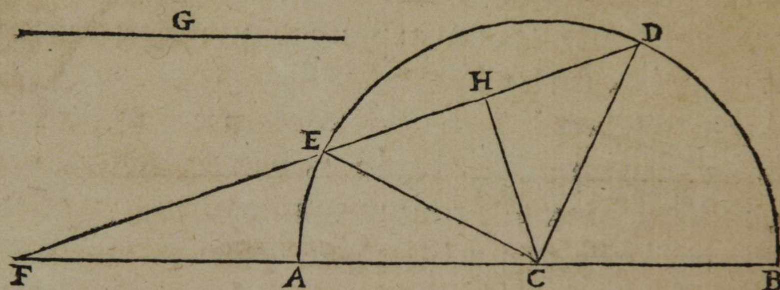
Ad illorum itaque Conſtructionem iter iam parauimus.

PROPOSITIO SEPTIMA

PROBLEMA SEPTIMVM.

Id, est Primum duorum Ghetaldi.

SIT Semicirculus ADB, in quo Centrum C, & Angulus Datus ſit, vel fiat ACD; Linea verò Data ſit CD ad Augulum Verticis, & Differentia Segmentorum Baſis G. Vt Triangulum igitur ex hiſce Datis con-



ſtruatur. A Puncto in Peripheriâ D Dato, & Lineâ Externâ G, ducatur DF, ex aliquo, ex ſuprà expoſitis, congruo Problemate; adeò vt Externa Linea FE, Æquetur G Datæ. Dico Tiangulum quæſitum eſſe constructum: Nam ſi ducatur Perpendicularis CH, ſuper DF, Differentia Segmentorum Baſis DF, fit FE, hoc eſt G. Quod erat intentum.

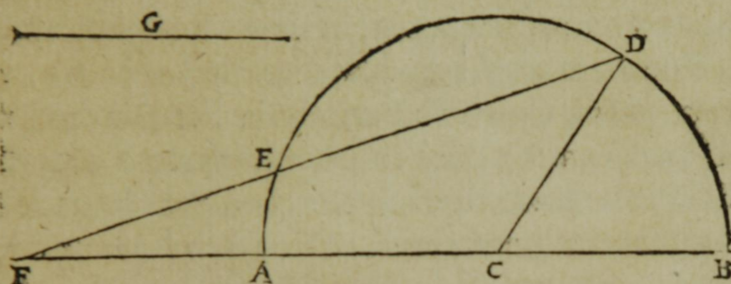
PROPOSITIO OCTAVA.

PROBLEMA OCTAVVM.

Id, est Secundum duorum Ghetaldi.

SIT Semicirculus ADB, & in eiuſdem Centro C, Datus ponatur Angulus ACD: Latus verò illud conſti-

tuens, fiat Semicirculi Semidiameter; & Linea G alternum Segmentum Baſeos, pariter ex aliquâ ex noſtris Propoſitionibus, vt ſuprà, congruâ, ipſi Puncto in Peripheriâ D, ducatur Linea DF, vt conueniens cum protractâ BA, in F, pars intercepta FE, Æqualis fiat expoſitæ G, & Triangulum Quæſitum erit conſtructum, cùm Segmenta Baſeos ſint DE, FE. Et alternum Æquatur G, vt oportuit.



ADNOTATIO.

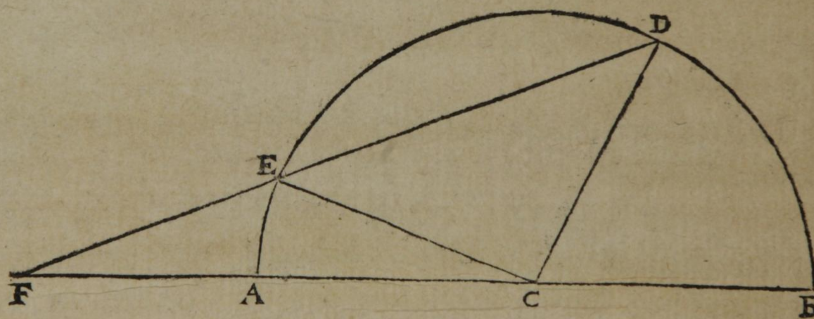
AD Authoris mentem fuerat hæc primùm quærenda Conſtructio, vt Anguli Plani deinceps haberetur Triſectio, nec data tunc erant ſufficientia: quia verè priùs Methodus præcedere debuerat, quâ aptaretur Data quælibet Linea inter Peripheriæ Convexum, & eductam Diametrum: Quod nos ſuprà præſtitimus, Vieta ſcilicet Supplementi Propoſitione ix[a], & Snellius Cyclometrici Propoſitione xxv[a]. id apertiſſimè indicarunt. Et quod omninò ad Triſectionem Anguli per effectionem Planorum (de quorum familiâ propriè eſt) deeſſe videbatur, abundè ſuppletum ſit, ad Problema idem deuenimus.

PROPOSITIO NONA.

PROBLEMA NONVM.

Angulum quemcumque Rectilineum Trifariàm ſecare Geometricè.

DAtus ſit Angulus BCD, Æqualiter Triſecandus. Facto Centro in C, ad quamlibuerit Diſtantiam CD, Semicirculus fiat ADB, in cuius Peripheriam cùm cadat Punctum D, Ab eodem ducatur Linea DF, vt intercepta pars à Convexo Peripheriæ, & Diametro productâ, nimirum FE, fiat ipſi Semidiametro AC, Æqualis. Et hoc habetur ſuprà in congruo Problematis Sexti Symptomate demonſtratum. Dico quod Arcus DB, ſiue



Angulus BCD, Trifariàm Æqualiter ſectus erit, & eius pars Tertia erit Arcus AE, ſiue Ducta CE, Angulus ACE, Nam Conſtructi Trianguli CDF Angulus Externus BCD, valet duos CDF, CFD Internos, & Oppoſitos. Sed CED, Æqualis eſt Angulo CDE. Sed Angulus CED, Duplus eſt Anguli CFE, aut FCE: ſunt enim Anguli ad F, & C, Æquales; quia Æqualia ſunt Latera EF, EC. Ergò Angulus CDF, Duplus eſt vtriuslibet CFD, ECF Angulorum. Sed Angulus Externus BCD,

poteſt

potest duos Internos, & Oppositos ad D & F. Ergò BCD, Angulus poterit Tres Angulos Æquales ipsi F, siue ECA. Et ideò Angulus BCD, Trisectus erit, & Pars Tertia fiet: Aut Angulus F; aut Angulus ACE; siue Arcus DB, Triplus erit Arcus AE. Quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

MAnifestum igitur erit, quotiescumque Linea comprehensa Externa, ab eductâ Diametro, & Convexo Peripheriæ, Æqualis fuerit Semidiametro eiusdem Circuli, pertinens ad Datum in Circumferentiâ Punctum, Angulum in concursu Æqualem fieri Tertiæ Parti Anguli Externi in Centro, vt hic Angulus CFD, Pars Tertia Anguli BCD, seu Arcus BD, Triplus fiat obuersi Arcus AE. Et optimè licebit sic argumentari. Angulus in Centro Trifariàm sectus est. Ergò Linea Externa pertingens ad Punctum in Peripheriâ Datum Semidiametro est Æqualis. Vel è conuerso; Ex eo quòd Linea Externa pertingens ad Punctum in Peripheriâ Datum Semidiametro Æqualis est. Ergò Angulus in Centro Æqualiter Trifariàm sectus est, vel Arcus illi obversus.

ADNOTATIO.

CRedebant Antiqui Trisectionis Anguli cujuslibet Plani effectionem ad Solidum pertinere Genus; vnde Pappus lib. 4. Propositione 35. sic ait.

Datum quidem Angulum, vel Circumferentiam Tripartitò secare, Solidum est, vt antè ostendimus; Sed Datum Angulum, vel Circumferentiam secare in Datam Proportionem, Lineare est, &c. sic ille.

D

At non Antiqui tantùm, ſed omnes quotquot fuêre Mathematici hactenùs in eandem iuêrunt ſententiam. Et vt alios recenſere pertranſeam, Albertus Girard Geometra, & in Algebricis verſatiſſimus, in Opuſculo illo Gallico Idiomate conſcripto, *Invention nouuelle en l'Algebre*, edito 1629. in 4°. Capite de Æquationibus Ordinatis, in hæc prorumpit verba, paginâ 32. (*Il eſt impoſſible de couper tout Arc propoſé en 3. ſans vſer d'autres lignes que de la Droicte, et Circulaire.*)

In hoc quàm longè à vero abſit, iam patet; & ampliùs patebit infrà, vbi ſumus oſtenſuri aduerſus Pappum, etiam in Analogicâ Sectione Anguli, Genus Planorum non immutari; at per illud omnia abſolui legitimè.

PROPOSITIO DECIMA.

PROBLEMA DECIMVM.

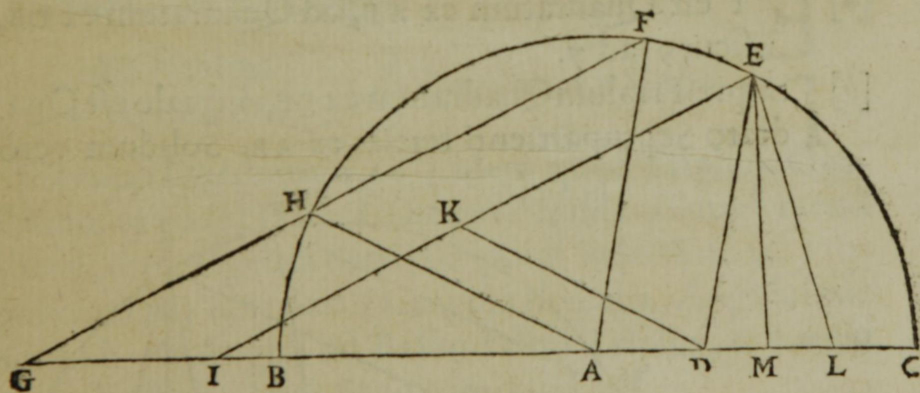
Diametrum Circuli ita continuare, vt ſit Continuatio ad Semidiametrum adjunctam Continuationi, ſicut Quadratum Semidiametri ad Quadratum continuatæ Diametri.

Eſt Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propoſitione xix.

ANNI vltra Seculi trientem recurrunt, ex quibus mihi Venetijs agenti, Apodixis oſtenſa fuerat, in quâ Profeſſores duo Clariſſimi aſſerebant noluiſſe, imò etiam (pro eorum ingenuitate) nequiuiſſe eiuſmodi Propoſitionis interpretationem exhibere; vel quia alijs detinerentur, vt ſuppono; vel quia illis nimia Authoris videbatur elegantia, id eſt obſcuritas; vel certè quia

hærebat inconcesſo Poſtulato, & abſque fructu labor apparebat. At ipſemet Author hæc, & alia non-nulla Problemata ad Heptagoni legitimā direxerat deſcriptionē. Non inutile verò aut injucundum erit (excluſo illo Poſtulato) illam, & reliquas huius generis Propoſitiones ad legitimam Geometriæ formam reuocare: vt inde omnia Supplementi Vietæ Problemata, à nullo Geometrarum rationabiliter repudiari poſſint tanquam exorbitantia; & verè Inſtaurata Geometria ab omnibus agnoſcatur: Quod fuit noſtri huius Opuſculi intentum.

Sit ſub Centro A, Diametro BC, Circulus: Et CD ſumatur pars Diametri Triens, & Semicirculi Arcus CE Triens: Ductæ ED, Parallela eidem fiat AF, & à Puncto F, agatur FG ſecans Peripheriam in H, ita vt HG, Semidiametro AC fiat Æqualis, (hæc illa effectio deſiderabatur in Geometriâ, & Mechanico ſuſtentabatur opificio, quam nos in integrum reſtituimus:) Ipſi verò FG, agatur Parallela EI, ſecans CG in I.

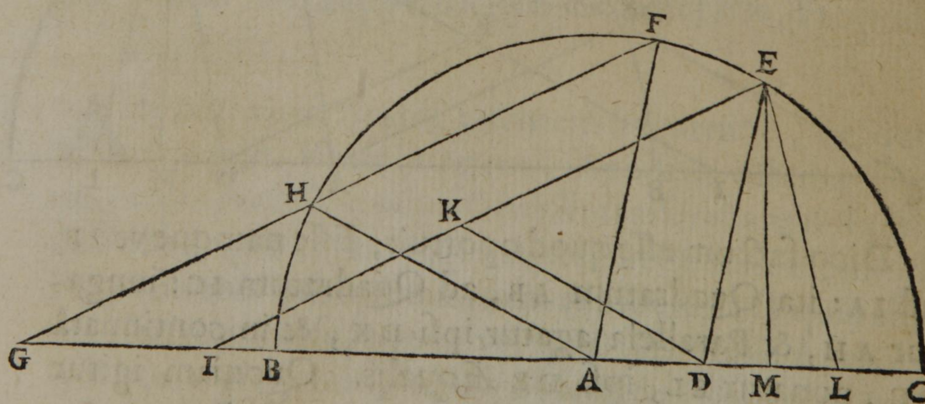


Dico factum eſſe quod oportuit; Eſſe namque vt IB, ad IA: ita Quadratum AB, ad Quadratum IC: iungatur AH, & Parallela agatur ipſi DK, & in continuatâ BC, ponatur EL, ipſi DE Æqualis. Quoniam igitur

Trianguli GHA, Crura GH, & HA, ſunt Æqualia, & à Baſis Termino A, educta eſt AF, ipſi GH Æqualis; Angulus FAC, ſit Triplus Anguli HAG. Triangulis autem GHA, HAF, Similia ſunt Triangula IKD, KDE, Et Triangulum Æquicrurum eſt IKD. Sed conſtructum quoque eſt Æquicrurum Triangulum DEL, & ſunt Crura DE, EL, Cruribus IK, KD, Æqualia, & Angulus EDL, ſeu ELD, Anguli KID, ſeu KDI, eſt Triplus. Quare Cubus ex ID, Minùs Solido Triplo ſub ID, & Quadrato ex IK, ſeu DE, eſt Æqualis Solido ſub DL, & eidem Quadrato ex DE. Eſt autem AD, Triens Semidiametri AC, Et cùm ex E, cadit in Diametrum Perpendicularis EM, fit DM, Sextans Semidiametri: Dodrantem verò Quadrati ex AB, Æquabit Quadratum ex EM, quod quidem Quadratum ex EM, adjunctum Quadrato ex DM, valet Quadratum DE. Quadratum igitur ex DE, Æquat Dodrantem Quadrati ex AB, plùs Triceſimâ ſextâ eiuſdem.

[a] ET eſt Quadratum ex AB, ad Quadratum ex DE, ſicut 9 ad 7.

[b] Itaque Triplum Quadratum ex DE, Æquale eſt Quadrato Septupartienti tertias ex AB. Solidum verò



ſub DL, & Quadrato ex DE, Æquabitur Cubo Septupartienti Viceſimas ſeptimas ex AB. Quare Cubus ex ID, Minùs Solido ſub ID, & Quadrato Septupartiente Tertias ex AB, Æqualis eſt Cubo Septupartienti Viceſimas ſeptimas ex AB.

Atque hoc eſto Primum Illatum.

SCHOLII PARS PRIMA.

[a] *Et eſt Quadratum ex* AB, *ad Quadratum ex* DE, *ſicut 9. ad 7.*
[b] *Itaque Triplum Quadratum ex* DE, *Æquale eſt Quadrato* $\frac{7}{3}$ *ex* AB.

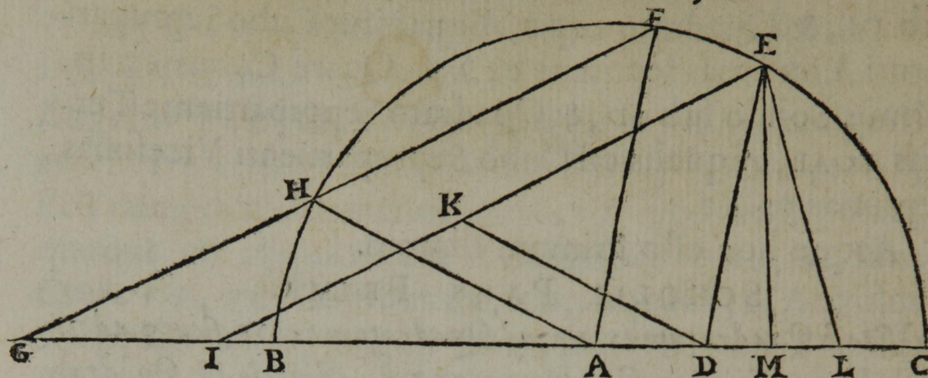
Sumitur vtriuſque termini Pars Tertia, rationis nimirum 9. ad 7. Ergò DE Quadratum, ter Æquatur AB Quadrato $\frac{7}{3}$ Solidum verò ſub DL, & Quadrato DE, Æquabitur Cubo $\frac{7}{27}$ AB: Nam Quadratum $\frac{7}{3}$ ex AB, in AB, quæ Tripla eſt DL, facit Triplum Solidum ex DE, Quadratum in DL, hoc eſt Quadratum $\frac{7}{9}$ ex AB, in AB Solidum, fit Triplum Solido DE, Quadrati in DL. Tertia igitur Pars illius, id eſt Cubus $\frac{7}{27}$ ex AB, Æquatur DE Quadrato, in DL. Quare

$$\left.\begin{array}{l}\text{ID Cubus}\\ -\text{ID in AB Q. } \frac{7}{27}\end{array}\right\}\text{Æquatur AB Cubo } \frac{7}{27}$$

Eſt enim Quadratum AB $\frac{7}{3}$ idem quod Triplum Quadratum ex DE (ex Propoſitione xvi[a] eiuſdem Supplementi Vietæ, & in Algebrâ Petri Herigonij inſertâ ad 23. Propoſitionem) ſunt duo Triangula Iſoſcelia, Angulusque Secundi eſt Anguli ad Baſim Primi Triplus, & Latera Æqualia ſunt. Ideò Sequitur, quòd

$$\left.\begin{array}{l}\text{ID Cubus}\\ -\text{ID in AB Q. } \frac{7}{27}\end{array}\right\} = \text{AB Cubo } \frac{7}{27}$$

Et hæc pro Illati Primi intelligentiâ clariore.



SEQVITVR AVTHORIS TEXTVS.

[c] OMnia ea Solida ſumantur Vicies ſepties. Ergò Cubus Vicies ſepties ex ID, Minùs Solido Ter & ſexagies ſub ID, & quadrato ex AB, æquatur Cubo Septies ex AB. Quâ æqualitate ad Analogiam reuocatâ, eſt vt quadratum ex ID Nouies, Minùs quadrato Vicies ſemel ex AB, ad Quadratum Septies ex AB, ita AB, ad Triplam ID. Et verò quadratum ex ID, valet Quadratum ex IA, & quadratum ex AD, vnà cum eo quod fit ſub AD, & IA Bis. Ipſa autem AD, eſt Triens AB. Quare quadratum Nouies ex ID, valet quadratum Nouies ex IA, Plùs eo quod fit ſub IA, AB Sexies, Plùs quadrato Semel ex AB. Eſt igitur vt quadratum Nouies ex IA, Plùs eo quod fit ſub IA, & AB Sexies, Minùs quadrato Vicies ex AB, ad quadratum Septies ex AB, ita AB ad compoſitam ex AB, & Triplâ IA. Quâ Reſolutâ Analogiâ, cùm quæ fient Solida, diuiſionem quæq; à Vicenario ſeptenario numero accipient, Cubus ex IA, Plùs Solido ſub AB, & quadrato ex IA, Minùs Solido duplo ſub IA, & quadrato ex AB, Æquatur Cubo ex AB.

Atque hoc eſto Secundum Illatum.

SCHOLII PARS SECVNDA.

[c] *Omnia ea Solida sumantur Vicies septies.* Ergò

ID Cubus 27.	Æquatur AB Cubo 7.
—ID, 63. in AB Q. 7.	

Reuocatâ ad Analogiam Æqualitate, Erit

vt ID Q. 9.	ad AB Q. 7. Ita AB ad ID, Triplam.
—AB Q. 21.	

Nam ex Analogiæ Resolutione, secundùm Artis Præcepta, Æqualitatem restitui oportet. Sed ex Elementis,

ID Q. valet { IA Q. + AD Q. } + IA in AD Bis,

AD verò Triés est AB. Igitur ID Q. 9. sunt { IA Q. 9. + IA in AB, 6. + AB Q.

Ideò, Erit

vt IA Q. 9.	ad AB Q. 7. Ita AB, ad ID Triplam.
+ IA in AB, 6.	
+ AB Q. 20.	

Hoc est ad compositam ex AB, & Triplâ IA. Quâ Resolutâ Analogiâ, & Solida diuisa per 27. Erunt,

IA Cubus	27.	Æqualia Cubo AB 7.
+ IA Q. in AB	18.	
— IA in AB Q.	60.	
+ AB in AI Q.	9.	
+ AB Q. in A	6.	
— A Cubo	20.	

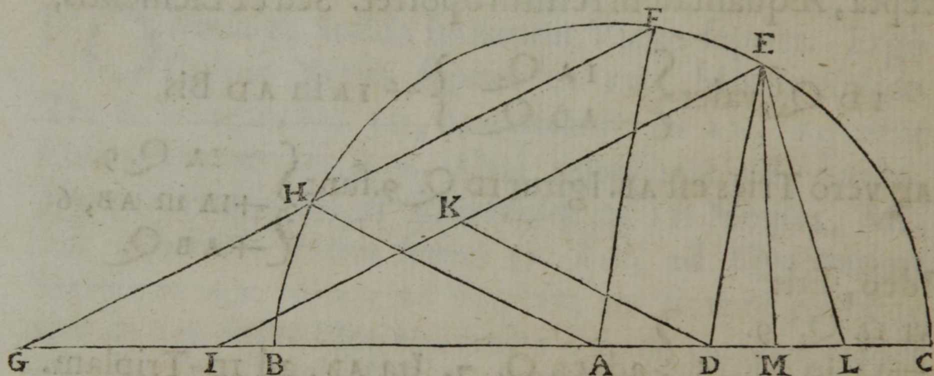
Factâ deinde Homogenearum partium translatione (ex Arte in Isagogicis traditâ, quâ non immutari Æqualitatem constat) in contrarias adfectiones, Erunt

1A Cubus	27.	Æqualia AB Cubo 27.
+1A Q.	27. in AB	
—AB Q.	54. in AI	

Et omnia diuiſionem accipiant per 27. Erunt,

1A Cubus	Æqualia AB Cubo.
+1A Q. in AB	
—1A in AB Q. Bis.	

Et hæc pro Illato Secundo clariùs explicato.



SEQVITVR AVTHORIS TEXTVS.

[d] EAdem autem Æqualitas rurſus ad Analogiam reuocetur, Erit igitur,

vt { 1A —AB } ad AB: Ita AB Q. { ad 1A Q. +1A, in AB Bis.

Et per Diæreſin,

vt { 1A —AB } ad 1A. Ita AB Q. { ad 1A Q. +1A, in AB Bis. +AB Q.

Et

Et interpretando,

vt IB, ad IA: Ita AB Q. ad IC Q.

Quod tandem erat Demonſtrandum.

SCHOLII PARS POSTREMA.

[d] *Eadem Æqualitas ad Analogiam reuocetur*, Erit

vt { IA —AB } ad AB: Ita AB Q. { ad IA Q. —+IA, in AB 2.

Nam Reſoluendo,

IA Cubus,
—+IA Q. in AB 2.
—AB in AI Q.
—AB Q. in AI.
} æqualia redeunt vt ſuprà, ipſi AB Cubo.

Hoc eſt per Homogenearum ſubductionem Partium, aut Graduum depreſſionem.

IA Cubus,
—+IA Q. in AB
—IA in AB Q. 2.
} æquantur AB Cubo.

Et per Diæreſin Analogiæ illius,

vt { IA —AB } ad IA. Ita AB Q. { ad IA Q. —+IA in AB 2. —+AB Q.

Et per interpretationem,

vt IB, ad IA: Ita AB Q. ad IC Q.

Quod erat oſtendendum.

ADNOTATIO.

SEquentia etiam Problemata excuſari poterant: At quia Exemplaria Authoris vix reperiuntur, & niſi iterùm ſub prælo committantur vniuerſa eiuſdem Opera: quemadmodùm paucis abhinc annis Elzeviriana ſpem fecerat Typographia, magno poſterorum præiudicio id ſuccedet. Herigonius ad XVIII. huius Supplementi ſubſtitit, nec reliqua proſequutus, noſtræ huic Inſtaurationi onus videtur reliquiſſe, vt integrè ſuppleatur, & intra Geometricos fines reducatur.

PROPOSITIO VNDECIMA.

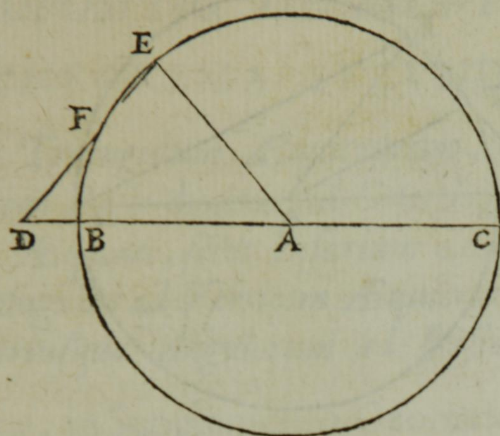
PROBLEMA VNDECIMVM.

Conſtituere Triangulum Æquicrurum, vt differentia inter Baſin, ad alterum è Cruribus ſit ad Baſin; ſicut Quadratum Cruris ad Quadratum Compoſitæ ex Crure, & Baſe.

Eſt Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propoſitione XX.

EXponatur Circulus ſub A Centro, Diametro quacumque BC, & continuetur CB Diameter in D, ita vt DB, ſit ad AD, ſicut Quadratum ex AB ad Quadratum ex DC. Ex D, poſteà ponatur in Peripheriâ Recta DE ipſi AB æqualis, & iungatur AE.

Dico Triangulum DEA, eſſe quale quæritur. Crura enim ED, EA, æqualia ſunt. Eſt autem DB Differentia inter Baſin DA, & Crus AC, ſeu AB. Ipſa verò DC, Compoſita eſt ex DA Baſe, & AC, ſiue AE Crure. Conſti-



tutum igitur Triangulum est DEA æquicrurum, vt Differentia DB, inter Basin, & Crus AE, vel DE, sit ad DA Basin, sicut Quadratum EA, vel ED, ad Quadratum Compositæ ex Base DA, & Crure EA. Quod erat Demonstrandum.

PROPOSITIO DVODECIMA.

THEOREMA PRIMVM.

Si fuerit Triangulum Æquicrurum, & Differentia inter Basin, & alterum è Cruribus sit ad Basin, sicut Quadratum Cruris ad Quadratum Compositæ ex Base, & Crure; Quæ à Termino Basis ducetur ad Crus Linea Recta, ipsi Cruri Æquali secabit Bifariàm Angulum ad Basin.

Est Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propositione xxi.

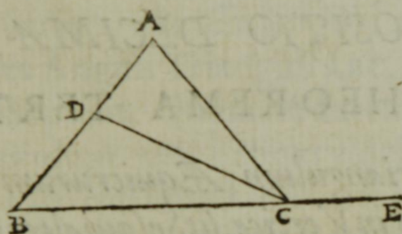
REpetatur antecedens Conſtructio: Actaque DE ſecet quoque Circulum in F, & iungatur AF. Dico AF Bifariàm ſecare Angulum EAD. Quoniam enim ex Hypotheſi eſt, vt DB ad DA, ita Quadratum ex AB, ad Quadratum ex DC. Ideò eſt vt DB ad AB, ita quod fit ſub DA, AB, ad Quadratum ex DC. Sed DB ad DE, ſeu AB; eſt vt DF ad DC. Quare eſt DF ad DC, vt id quod fit ſub DA, AB, ad Quadratum ex DC. Et conſequenter eſt DF ad AB, ſeu DE; ſicut DA ad DC, Et ſubducendo eſt DF ad FE, ſicut AD ad AC. quare connexa EC, fit ipſius FA Parallela. Itaque Angulus ECD, Angulo FAD eſt æqualis. Sed Angulus EAD, Duplus eſt Anguli ECD, cùm ille ſit in Centro, hic in Circumferentiâ. Angulus igitur EAD, ſectus eſt Bifariàm à Rectâ AF. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

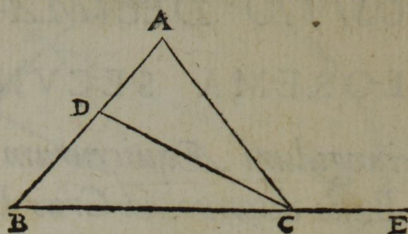
THEOREMA SECVNDVM.

Si fuerit Triangulum Æquicrurum, Quæ autem à Termino Basis ducitur ad Crus Linea Recta ipsi Cruri Æqualis, secet Bifariàm Angulum ad Basin, Angulus ad Verticem Æquicruri Sesqui-alter est vtriusque Angulorum ad Basin.

Est Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propositione XXII.



SIt Triangulum ABC, habens AB, AC, Crura æqualia: à cuius Termino C, cùm ducitur ad Crus ei Oppositum Recta Linea CD, Cruri æqualis, ipsum ACB Angulum Bifariàm secat. Dico Angulum BAC, esse Sesquialterum Anguli ABC, seu ACB. quoniam enim à Termino C, Basis Trianguli æquicruri ABC, ducitur Recta CD ipsi Cruri AB, vel AC æqualis: ideò Angulus ACE Exterior, Triplus est Anguli ACB, vel ABC. qualium itaque Angulus ABC, seu ACB, Partium est Duarum; talium Exterior anguli DCB, est Partium Sex. Angulus verò DCA, qui Dimidius est Anguli ACB, eorundem est vna, vt etiam Angulus DCB. Constant igitur DCB Angulus, & suus



Exterior talibus Septem Partibus: valent autem duos Rectos, ſicut Tres Anguli Trianguli. Cùm igitur Anguli ABC, ACB, quilibet ſint Duarum Partium, Angulus BAC, relinquitur earundem Trium. Eſt igitur BAC, Seſqui-alter vtriuſvis Anguli ABC, ſeu ACB. quod erat Demonſtrandum.

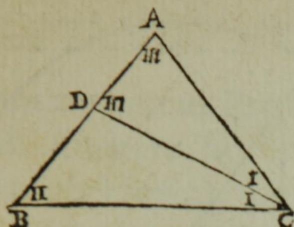
PROPOSITIO DECIMA-QVARTA.

THEOREMA TERTIVM.

Si fuerit Triangulum Æquicrurum, cuius Angulus qui exiſtit in Vertice, ſit Seſquialter vtriuſque Angulorum qui ſunt ad Baſin, & à Termino Baſis ducatur ad Crus Linea Recta ipſi Cruri Æqualis, vnde Triangulum rurſus fiat Æqualium Crurum, quorum vnum eſt educta ſecans, alterum Crus Primi non ſectum, Erit in iſto Secundo Triangulo vterque Angulorum qui ſunt ad Baſin, Triplus reliqui.

Eſt Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propoſitione XXIII.

SIt Triangulum ABC, habens Crura AB, AC, æqualia, & ſit Angulus BAC, Seſqui-alter vtriuſque Angulorum ABC, ACB, Et à Termino Baſis C, ducatur in Crus AD,



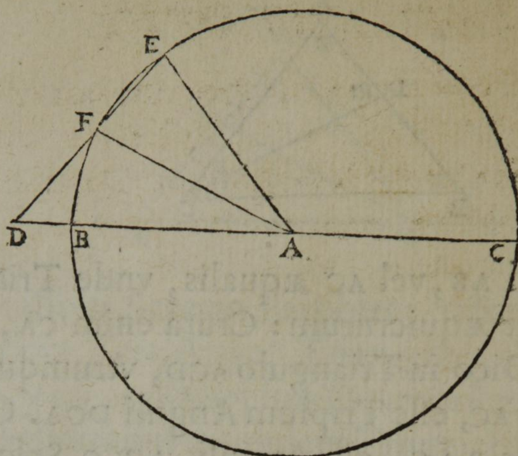
Recta CD, ipsi AB, vel AC æqualis, vnde Triangulum ACD, rursus sit æquicrurum: Crura enim CA, CD, habet æqualia. Dico in Triangulo ACD, vtrumque Angulorum ADC, DAC, esse Triplum Anguli DCA. Quoniam enim Angulus BAC, est Anguli ABC Sesqui-alter, vel ACB. Ideò qualium Partium Angulus ABC est Duarum; talium BAC, est Trium. Sed earundem, & Angulus ACB, est Duarum, cùm sit Angulo ACB Æqualis: atque adeò Tres Anguli Trianguli ABC, hoc est Duo Recti æstimantur Septem. Quoniam autem Æquicrurũ sit quoque Triangulum ACD habens videlicet Crus CD Cruri CA Æquale. Ideò qualium Angulus DAC, taxatus est Trium partium: talium erit totidem Angulus ADC, atque adeò Angulus ACD, Pars Vna, cùm talium Duo Recti sint Septem. In Triangulo igitur ADC, Vterque Angulorum DAC, ADC, est Triplus reliqui ACD. Quod erat Demonstrandum.

PROPOSITIO DECIMA-QVINTA.

PROBLEMA DVODECIMVM.

In Dato Circulo Heptagonum Æquilaterum, & Æquiangulum describere.

Est Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propositione XXIV.



SIt datus Circulus, cuius Centrum A, Diameter BAC. In eo oporteat Heptagonum Æquilaterum, & Æquiangulum inſcribere. Diameter BC, continuetur in D, ita vt DB, ad DA ſit, vt quadratum AB, ad quadratum ex DC, Et in Circumferentiâ ponatur DE Æqualis Semidiametro. Dico EB, eſſe Arcum Heptagoni, hoc eſt Partem Circumferentiæ Septimam. Secet ipſa DE, Circulum in F, & iungantur Semidiametri AE, AF. Eſt igitur Triangulum DEA, Æquicrurum, ita conſtructum, vt Differentia Baſis & Cruris ad Baſin eſt, ſicut Quadratum Cruris ad Quadratum Compoſitæ ex Baſe & Crure. Quare Recta AF, ipſi Cruri Æqualis, ſecat Bifariàm Angulum ad Baſin, ideòque qualium Duo Recti ſunt Partium Septem; talium Angulus EAD, eſt Duarum. Qualium verò Quatuor Recti ſunt Septem, id eſt tota Circumferentia; talium Angulus EAD, eſt Vna. Ipſius autem Anguli EAD, amplitudinem definit Arcus EB. Quare Arcus EB, Septima eſt Pars Circumferentiæ totius. Subtendatur igitur Septies. Et erit in Circulo Dato inſcriptum Heptagonum Regulare. Quod erat faciendum.

ADNO-

ADNOTATIO.

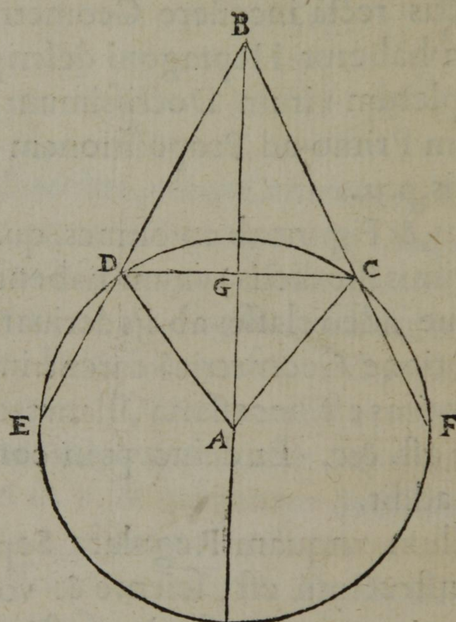
PRæmiſſas continuauimus Propoſitiones, vt vnà intelligatur ab Authore ſic ordinatas fuiſſe, vt in Circulo inſcriberetur Heptagonum: Quamuis perfecta deſcriptio ab eodem non tradatur, propterea quòd eius Poſtulatum claudicet. Modò verò, quùm ex noſtris ſuperiùs deductis rectà incedere Geometria videatur, legitima etiam habetur Heptagoni deſcriptio, contra Ioannem Kepplerum virum Doctiſsimum, qui Libro Harmonicorum Primo ad Propoſitionem 45. hiſce inſurgebat verbis, p. 32.

Heptagonus, & Figuræ ab eo omnes, quæ Numerum Laterum ex Primis (ſic dictis) vnum habent, earumque Stellæ, totæque adeò claſſes ab ijs deriuatæ, extra Circulum deſcriptione Geometricâ carent: in Circulo etſi Laterum Quantitas eſt neceſſaria, illam tamen ignorari æquè neceſſe eſt. &c. Et deinceps in corpore Propoſitionis p. 34. addit.

Itaque nullum vnquam Regulare Septangulum à quoquam conſtructum eſt, ſciente & volente, & ex propoſito agente: nec conſtrui poteſt ex propoſito: ſed benè fortuitò conſtrui poſſet: & tamen ignorari neceſſe eſt, ſitne conſtructum, an non. Hæc ille. Crediderat fortaſſe Kepplerus ex eo quòd ſublime illud Vietæ ingenium ad perfectam Heptagoni delineationem non peruenerat, non eſſe in gradu Poſſibilium, aut ex Arte exhibendorum. At pro eius in Philoſophando libertate, ſi adhuc ſupereſſet, quin ſententiam retractaret non ambigimus; quòd autem non ad ſolam in Circulo inſcriptionem coarctemur, aliâ perficiemus viâ, priùs hoc præmiſſo Lemmate.

LEMMA SECVNDVM.

Si à Puncto extra Circulum Dato, per Extrema Chordæ, ducantur secantes Lineæ Circulum, Partes intrà, & extrà inter se comparatæ, Æquales erunt; quùm ab eodem Puncto ad Centrum, Linea Chordam ad Rectos Angulos, aut Æqualiter diuidet.



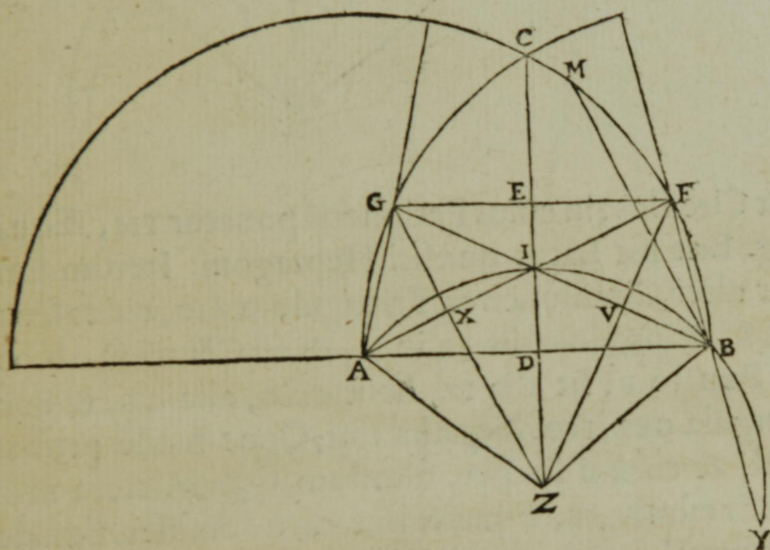
SIt Circulus, cuius Centrum A, Punctum extra Datum B, & in Circulo Chorda DC, per cuius Extrema Puncta DC, duæ veniant BDE, BCF, & tertia BGA, per Centrum taliter, vt ad Rectos insistat Angulos in G, aut Bifariàm diuidat DC. Dico quòd Partes Linearum BE, BF, tum extra, tum intra Circulum Æquales sunt, scilicet BD, BC, extrà: DE, CF, intrà. Nam iunctis DA, AC, in duobus Triangulis DAG, CAG, ex Hypothesi Anguli Recti ad G, omnes Lineæ Æquales coniunguntur. Ergò Anguli DAG, CAG Æquales, & duorum Trian-

gulorum BAD, BAC, etiam Bases BD, BC, erunt Pares, Et cùm duo Rectangula EBD, FBC, Æqualia sint sub Æqualibus BD, BC; Etiam BE Æqualis fiet BF, Et reliquæ DE, CF. Quod erat intentum.

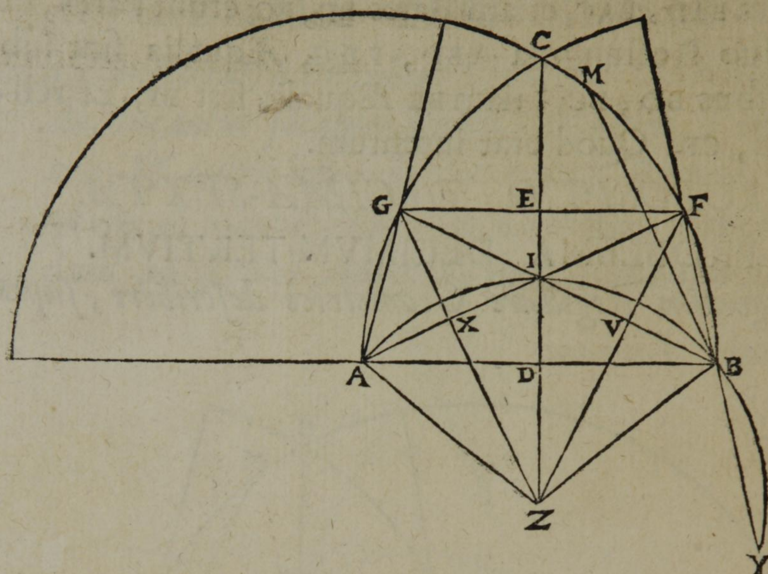
PROPOSITIO DECIMA-SEXTA.

PROBLEMA DECIMVM-TERTIVM.

Heptagonum Regulare Geometricè describere, super Datam Lineam.



SIt Linea AB, & ex eius distantiâ à Punctis A B, duæ Circuli portiones AC, BC, scribantur, se mutuò secantes in C, à quo Puncto demittatur Perpendicularis CD, Et Bifariàm diuidatur in E, per quod Punctum ipsi AB, Parallela fiat FG, quæ Portiones Circulorum in FG secabit, & ducta AF, siue BG se secantes in I. Dico Triangula ABG, ABF, esse Isoscelia, & illorum Angulos supra Basin BF, aut AG (alter sufficit ad intentum ostendendum) esse ad Angulum Verticis in Ratione Triplâ. Facto igitur in A Centro, interuallo AB, scri-

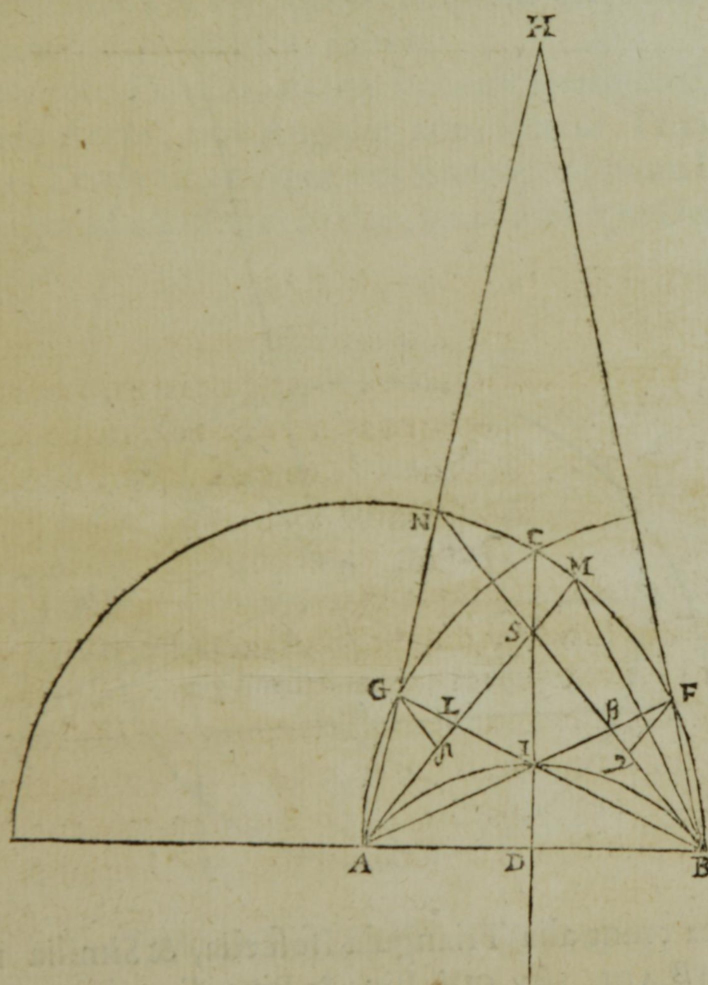


batur Circulus, in cuius Peripheriâ ponatur FM, Æqualis BF. Erit BM Latus quæsiti Heptagoni. Iterùm scribatur alter Circulus circa Triangulum AIB, cuius Centrum Z, & producatur FB in Y, & ad Centrum ab eodem Puncto F, sit alia FZ, sicut ex G, alia GZ, & cùm Triangula GEZ, FEZ, Æqualia sint, Quod facilè probari potest, & eorum Dupla, nimirum Quadrilatera BFIZ, AGIZ: Et cùm AI, IB, Æquales sint, earũ Semisses Æquales erunt. Ergò Linea FV, diuidit Bifariàm IB. Ergò ex Lẽmate, Lineæ FA, FY, & partes earum, tum intra, tum extra Circulum Æquales fient. Sed in Triangulo ABI Isoscele, Angulus BIF Externus, Duplus est vtriuslibet Interni, & Oppositi IAB, aut IBA. Ergò Angulus FBI, erit etiam Duplus eiusdem IBA. Totus igitur FBA Angulus, Triplus fit Anguli IBA, siue IAB. At in Isoscele, Anguli supra Basin Æquantur. Igitur in A facto Centro, & Interuallo AB, si scribatur Circulus, Chorda BF, quæ Angulo in Centro A opponitur, erit Pars Decima-quarta Circumferentiæ, Et eius Dupla BM, Septima Circuli

Pars. Circumducatur & BM Septies, habebitur Heptagonum legitimè, Geometricè, ac regulariter ſcriptum. Quod erat faciendum.

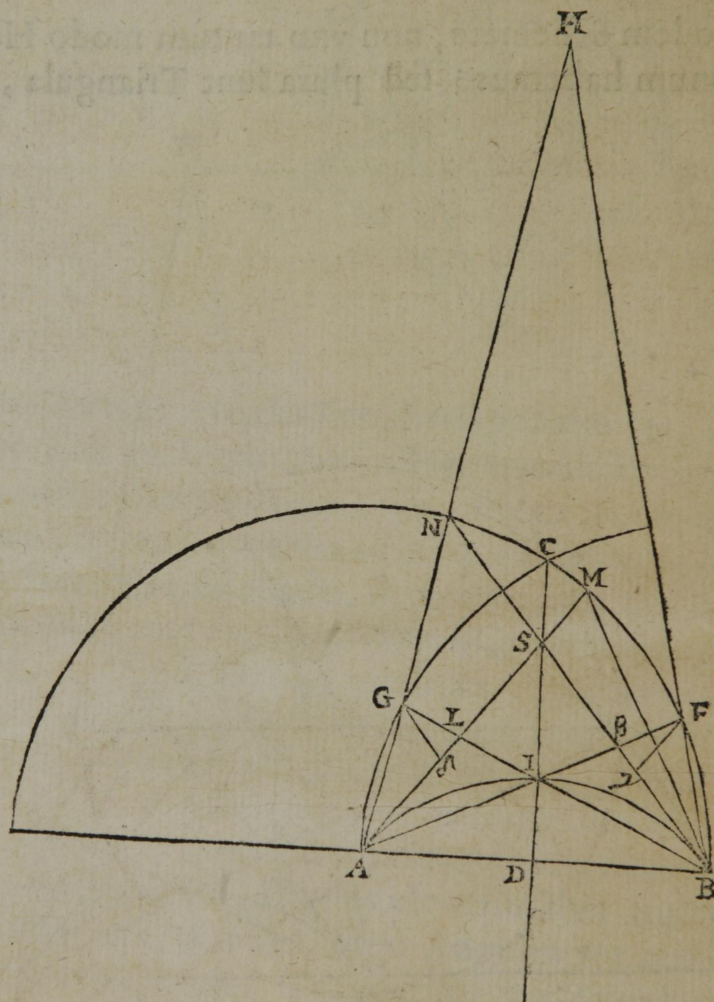
CONSECTARIVM.

IN eodem Schemate, non vno tantùm modo Heptagonum habemus ; ſed plura ſunt Triangula, ad



efformandum illud idem Heptagonum apta. Nam præter duo BAF, ABG, ductis Lineis AG, BF, Nouum

Iſoſceles fiet AHB. Et cùm Anguli ſupra Baſin A, & B, Æquentur; erit etiam H, Angulus Æqualis FAB, ſiue GBA. Et ſi ducãtur AM, BN, & Fγ Parallela AM: aut Bδ, Parallela



BN; Sex erunt alia Triangula Iſoſcelia, & Similia BSL, ASβ, BFβ, AGL, Fβγ, GLδ, Bina & Bina Æqualia & Similia. Nouem igitur Triangula expoſuimus ipſi Kepplero aduerſanti, quæ Heptagonum deſcribunt.

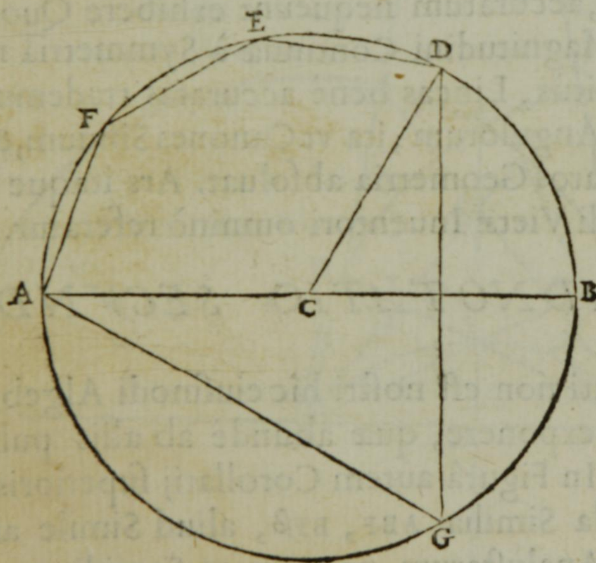
PROPOSITIO DECIMA-SEPTIMA.

PROBLEMA DECIMVM-QVARTVM.

Enneagonum Regulare Geometricè deſcribere.

EX ſuprà à nobis Demonſtratis, hoc adeò facilè efficietur; vt vix, quod reliquum eſt, inter Problemata locum habere debeat.

Deſcripto Circulo, ſtatim habetur Hexagoni Latus; Deinde Arcus, ſiue Angulus ACD, ſecetur Trifariàm, vt Pars Tertia ſit AF, quæ erit Enneagoni vnum Latus. Et quùm id clariſſimè pateat, nouâ non eget Demonſtratione.



ADNOTATIO PRIMA.

QVùm de Heptagono diſputaret Kepplerus, verum eſſe aſſerebat, ad inſcriptiones Figurarum, Spe-

ciosam Logisticen Geometris parùm adferre subsidii; Et Opus Algebricum nihil prodesse, vt Lineas quæsitas in Circulo exhibere possent: in quo sanè ab eo minimè dissentimus. Inueniunt enim Algebrici quotquot Media libuerit inter Extrema in Analogiâ continuâ; At in Magnitudine Lineari quæsitam Quantitatem numquam assignabũt: Continetur enim sub involucris Potestatum Graduúmve: At in Numeris determinare accuratè Facultas Numerorum recusat. Quando proponunt igitur Algebristæ,

3. N—1. C.

5. N—5. C.+1. Q. C.

7. N—14. C.+7. Q. C.—1. Q. Q. C.

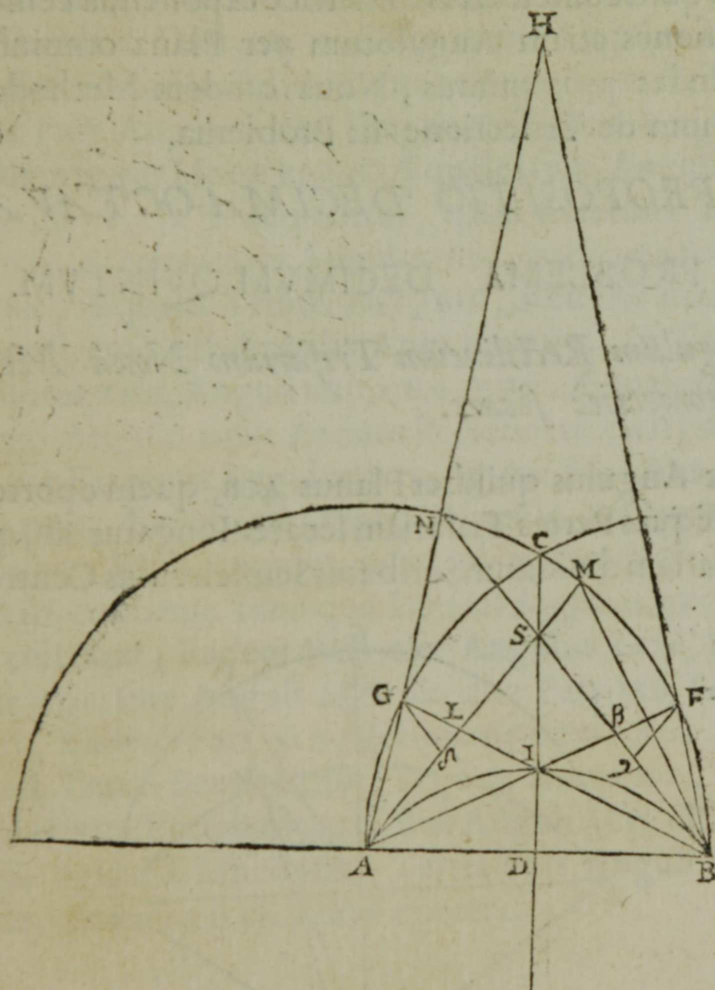
vel simile aliquod compositum pro diuisione alicuius Numeri, accuratum nequeunt exhibere Quotum: Sed quùm Magnitudini Continuæ à Symmetriâ nihil officiat penitùs, Lineas benè accuratas trademus, ex diuisione Angulorum; ita vt Canones Sinuum, & alios ab ijs deriuatos Geometria absoluat. Ars itaque Angulos diuidendi Vietæ Inuentori omninò referatur.

ADNOTATIO SECVNDA.

INstituti non est nostri hîc eiusmodi Algebrica Præcepta exponere, quæ abundè ab alijs publicè habentur. In Figurâ autem Corollarij superioris, si Duo Triangula Similia ABF, BFβ, aliud Simile assumant; & more Analystarum, ponatur AB Semidiameter, Vnitas Prima Proportionalium. Et BF Secunda, quæ dicatur 1. N. seu 1. ℞. Tertia Proportionalis Continua fiet Fβ & signatur 1. Q. siue 1. ʒ. Quarta erit βγ, & notabitur 1. C. Quare si Tres Lineæ Æquales 1. N. siue BF, continuentur

in

in directum in BP, & ab aggregato illarum auferri intelligatur Quarta illa Proportionalis $\beta\gamma$, siue 1. C. Relinquetur Chorda Arcus BN, pro Chordâ Tripli Arcus BF, FM, MN. Et hoc est illud quod Algebristæ petunt, cùm iu-



bent auferri Quartam Proportionalem, scilicet, vt dum dicunt 3. N—1. C. hoc est Secunda Proportionalis Ter sumpta minùs Quartâ Proportionali. Et verè Kepplerus Algebristas carpere videtur, dum quod in quæ-

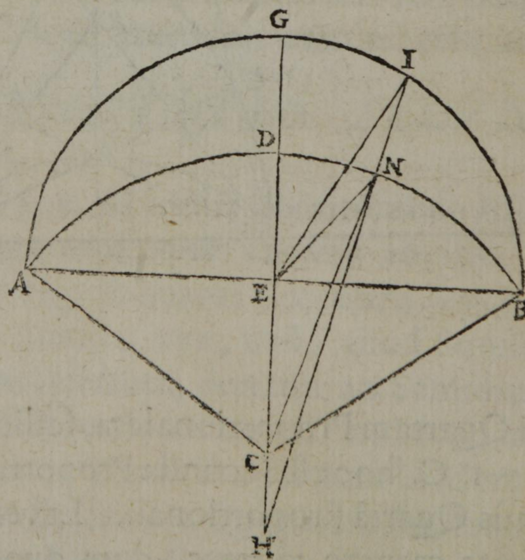
ſtione eſt ſupponunt: ita vt ſi Angulum Trifariàm, Quintù, aut Septuſariàm, vel quâcunque velint diuiſione perficere per ſuas Poteſtates, nunquam ad Continuum deuenire poſſunt, etſi quàm proximè. Nos verò qui Geometrica Geometricè exponenda cenſemus, diuiſiones etiam Angulorum per Plana omninò perficiendas proponimus, Nouâ quidem Methodo. Et Primum de Triſectione ſit Problema.

PROPOSITIO DECIMA-OCTAVA.

PROBLEMA DECIMVM-QVINTVM.

Angulum Rectilineum Trifariàm Nouâ Methodo Geometricè ſecare.

SIt Angulus quilibet Planus ACB, quem oporteat in Æquas Partes Trifariàm ſecare. Iungatur AB, quę in E Bifariàm diuidatur. Scribatur Semicirculus Centro E &



interuallo AE, aut EB, Et in Peripheriâ ponatur BI, Pars Tertia, quod vnicâ fiet aperturâ Circini Geometricè. Ductâ verò alterâ Diametro, CE, in G producatur etiam in oppositam partem, ita vt EH Æquetur EG, à Puncto H iungatur HI, secans partem Peripheriæ ADB, siue Anguli C Dati, in N. Dico quòd Angulus ACB erit sectus Trifariàm à Lineâ CN, vt Angulus BCN, Tertia fiat Pars Anguli ACB, Iungantur Lineæ EN, CN. Quoniam igitur Lineæ EI, EH, Æquales sunt, Anguli supra Basin H, & I Æquantur, quos Externus GEI adæquat, Si apponatur Angulus NEI, erit totus Angulus DEN, Æqualis Tribus EHI, EIN, NEI. At duobus hisce postremis est Æqualis Angulus ENH. In Triangulo igitur ENH, Anguli ENC, CNH, EHN, Æquales sunt Externo Angulo DEN. At duos Posteriores CNH, EHN, adæquat Externus Angulus ECN. Igitur Externus Angulus DEN, Æqualis est Duobus Internis, & Oppositis ECN, ENC. Ergò Angulus DCN, ad N Punctum cum Lineâ HI, conuenit. Ideò quæ Pars est Angulus GEI, Semicirculi AGB, Eadem Pars erit Angulus DCN, Peripheriȩ ADB, siue Anguli ACD. Et quæ Pars IEB, Semicirculi, Eadem Pars NCB, Peripheriȩ ADB. Sed IEB, Pars est Tertia Semicirculi. Ergò & Arcus NB, siue Angulus NCB, Peripheriȩ ADB, siue Anguli ACD, est Pars Tertïa. Igitur à Lineâ HNI, Tertia Pars Anguli Dati secatur. Et factum est quod oportuit.

PROPOSITIO DECIMA-NONA.

PROBLEMA DECIMVM-SEXTVM.

Angulum quemlibet Rectilineum Quintufariàm Æqualiter Geometricè ſecare.

SIt Angulus quilibet Planus ACB, cuius Quintam oporteat aſſignare Partem. Eadem vt ſuprà repeta-

tur Conſtructio, & Quinta Semicirculi Pars ſit AI. Iungatur EI, cui Æqualis fiat EH. Et ducta, HI ſecet Peripheriam ADE, ſeu Angulum ACB, in Puncto N. Dico Lineam HNI, Problema efficere, & Angulũ NCA Quintam auferre Partem totius ACB. Nec Noua erit Demonſtratio; quùm prorſus, vt in pręmiſſâ, Argumentari oporteat.

ADNOTATIO.

DEſcriptiones Heptagoni, ac Enneagoni præmiſimus, quia Diuiſio Anguli Plani tunc in Partes Ali

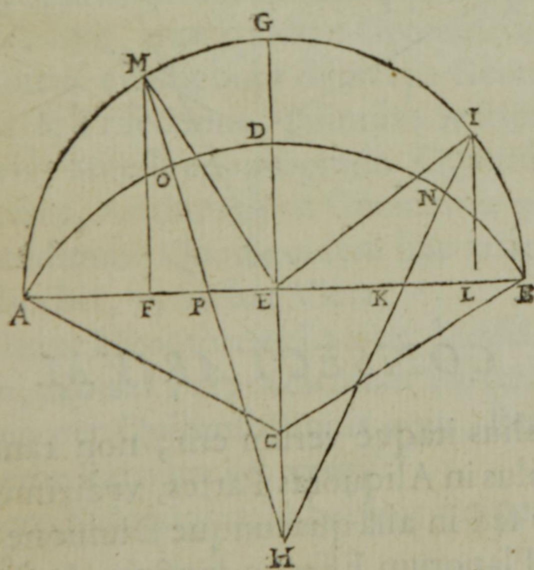
quotas efficietur, cùm in easdem Semicirculum priùs secare nouerimus.

PROPOSITIO VIGESIMA.

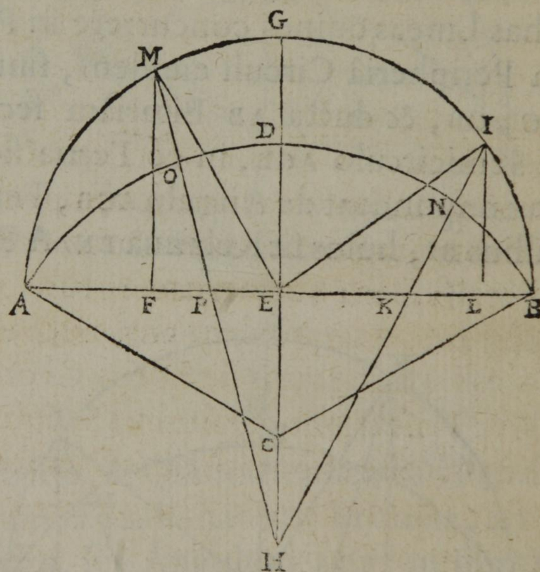
THEOREMA QVARTVM.

Angulus Rectilineus in Quotvis Partes secari contingat, Diuisionum Lineæ in vnico Peripheriæ conuenient Puncto.

SIt Angulus Rectilineus quilibet ACB, diuisus Quintufariàm, & iterùm diuisus Trifariàm, Lineis HI, & HM. Dico has Lineas omnes concurrere in Puncto eodem H. In Peripheriâ Circuli eiusdem, sint æquales, aut fiant AC, CB, & ducta AB Bifariàm secetur in E, scriptóque Semicirculo AGB, in eo Tertia sit assumpta Pars AM, cui respondeat de Angulo ACB, Tertia AO, & de Quintâ illius BI, huius sit Relatiua BN. A Punctis MI,



Perpendiculares demittantur MF, IL, iunctiſque ME, IE, erunt Anguli EMF, EIL, Bifariàm à Lineis MH, IH diuiſi: Quod facile probabimus. Triangula enim HEK, ILK, Similia ſunt, & vi Parallelarum HE, IL, Anguli EHI, LIK Æquales. At Æquales ſunt EKI, EIH. Ergò EIL, diuiditur Bifariàm Lineâ HI. Similiter & eâdem formâ probabitur de altero EMF, & de quocunque alio Angulo. Igitur duo Anguli EMH, EIH, Æquantur Angulo MHI. Sed MEI, in Centro Duplus eſt Angulorum EMH, EIH. Ergò Duplus Anguli MHI. Ideò Angulus MHI, in Peripheriâ erit eiuſdem Circuli. Quod erat propoſitum.



CONSECTARIVM.

GEneraliùs itaque verum erit, non tantùm quùm Angulus in Aliquotas Partes, vt diximus, diuidendus fuerit: ſed in aliâ quacunque Diuiſione Analogicâ ad Genus Planorum Effectio ſpectet. Imò etſi Aſym-

metra Diuiſio accidat; nihilominùs noſtrâ hac Methodo efficietur. Hinc prorſus reiecta adparet ſententia Pappi, & aliorum aſſerentiũ Analogicam diuiſionem Anguli Plani, ad Lineare ſpectaſſe Genus; & Triſectioné ad Solida. Quod omninò falſum ipſa manifeſtat Conſtructio.

ADNOTATIO PRIMA.

SI nouus Arcus circa AB deſcriberetur Centro facto inter H & E, neque in H, aut in C, Angulus minueretur, vel augeretur ACB; nihilominùs ex eadem HI, auferretur, tam ex nouo Arcu, quàm ex ADB, imperata Pars. Quare ante totius Anguli determinationem videtur Pars auferri poſſe imperata. Quod ad Paradoxi naturam accedit.

ADNOTATIO SECVNDA.

PRæceptis Arithmetices inſtructi, & quovis Artificio Logiſtices; dum ad condendos Canones Sinuum ſe conferunt, Prçciſionem obtinere nequeunt, Aſymmetriâ id prohibente, quæ quidem Geometriæ non officit: Ideò Lineas exhibebunt deinceps Geometræ benè accuratas, & Triſectione, Quintúve Sectione Æquale, nec vlteriùs neceſſe erit progredi. Quantùm poſteà ad vſum ſpectat, Arithmeticen Geometriæ præſtare libenter concedimus. Quod quidem hâc etiam Methodo exequi licebit, vt aiebat Vieta,

1. Ex Sectione Hypothetici Lateris, Mediâ, ac Extremâ Ratione, dabitur Perpendiculum Partium xviij°.

2. Et ex eo per Quintuſectionis opus, Perpendiculum inuenietur Partium iij°. xxxvj′.

3. Ex opere Triſectionis, habebitur Perpendiculum Partium xx°.

4. Et hinc iterùm Triſecando, Perpendiculum Partium vj°. xL'.

5. Deinde per Biſectionis opus, Perpendiculum Partium iij°. xx'.

6. Ex Differentiâ Perpendiculorum Partium iij°. xxxvj'. & Partium iij°. xx'. dabitur Perpendiculum xvj'.

7. Et ex repetitâ inde Biſectione habebuntur Perpendicula pro Minutis Primis, 8'. 4'. 2'. 1'.

Et ſi placet, vlteriùs ijſdem opportunis Effectionibus, ad Minutiora progredi poteris: oſtendiſſe ſufficiat, Geometricè, ad omnimodam Præciſionem Canonem extrui poſſe. Quod hactenùs erat ignoratum.

PROPOSITIO VIGESIMA-PRIMA.

PROBLEMA DECIMVM-SEPTIMVM.

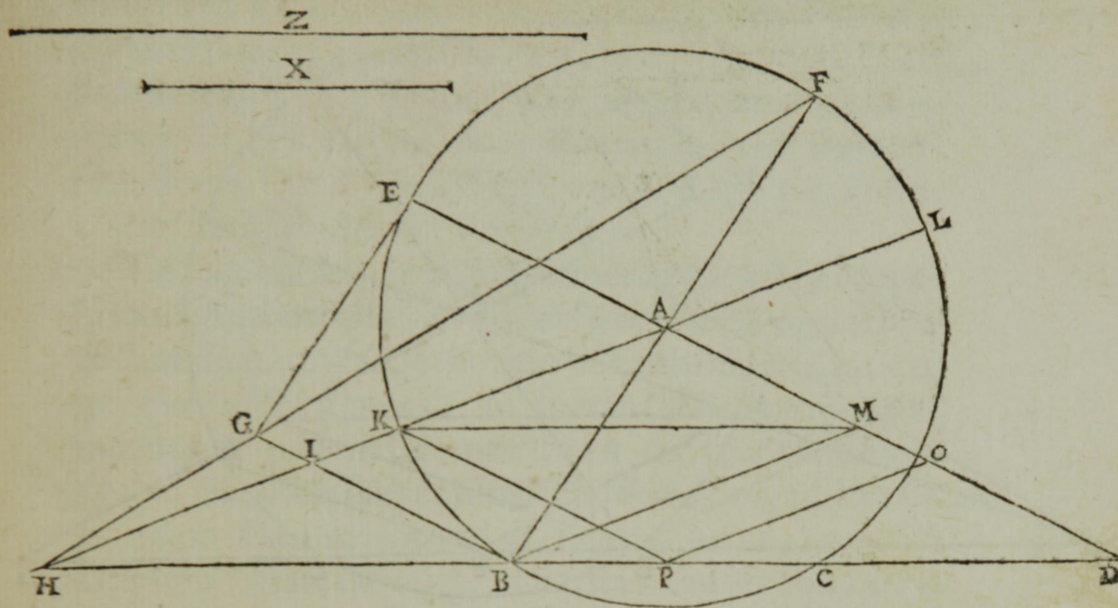
Duas Medias inter Extremas Lineas, in ſerie Quatuor Proportionalium, Geometricè reperire.

ANtiqui Sapientes ad hoc Problema referebant, & meritò, illud Famoſum de Cubi Duplicatione; quod quidem à nemine hactenus Geometricè abſolutum fuerat, quanquàm per genera diuerſa: Quæ omnia, vt à legibus exorbitantia Facultatis, non admiſerunt ſynceriores Geometræ: Et nos ſimul cum Vietæo Poſtulato reiecimus, oſtenſuri per germana Principia, & facilè perfici poſſe, vt ſequitur.

Sint itaque Extremæ Datæ z, & x Lineæ, inter quas oporteat Medias inuenire in Analogiâ Continuâ.

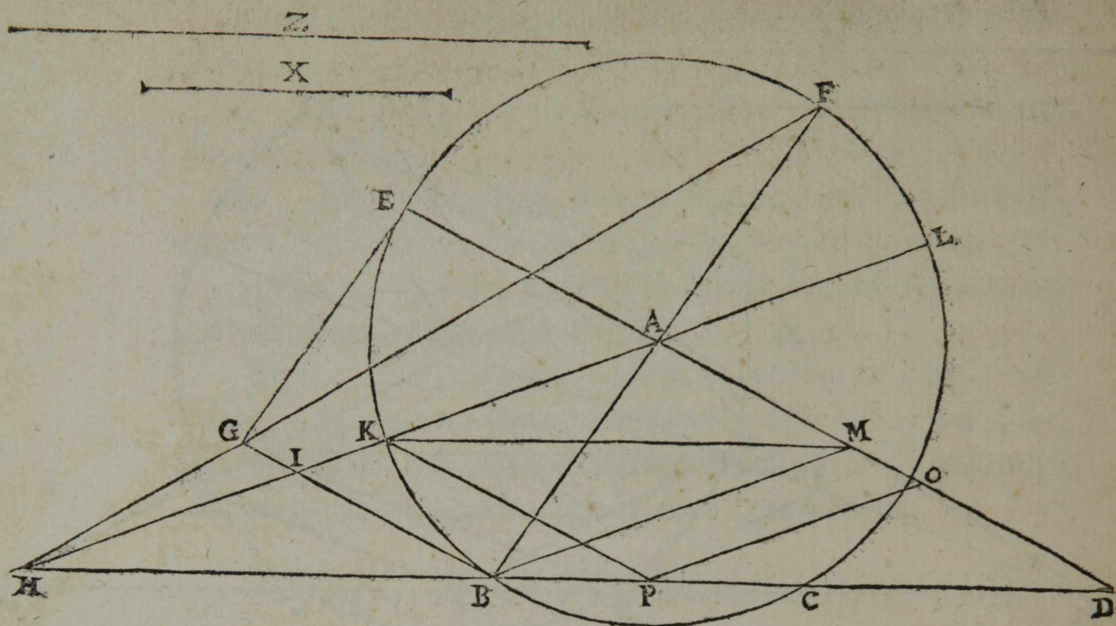
Ex Semiſſe z, tanquam Semidiametro, Circulus ſit BCL, in quo poſita BC, Æqualis x Minori expoſitæ, & Duplicetur in DC: ita vt BD, Dupla ſit BC. Deinde per

Centrum



Centrum ex D Puncto, ducatur DAE, cui à Puncto B, fiat Parallela BG. Vsque adhùc constructio Vietæ; cuius est eadem Propositio Vª. Supplementi. Herigonius in Albræ Supplemento Prop. Iª. etiam transfert illam; & alij alibi, qui in constructione benè se habent: deinde Mechanicè procedunt, cùm in A Puncto, fixam ponunt regulam, vt Pars eiusdem inter BG, & CB, eductam, colligatur PO, Æqualis Semidiametro AB. Quæ quidem Effectio rejicienda prorsùs est. At nostra intra Geometricos consistit fines; Nimirùm.

A Puncto B, per Centrum A, altera ducatur Diameter BAF, cui ex E Puncto, Æquidistans fiat EG, occurrens BG, in Puncto G. Posteà ex F, per G Punctum, altera agatur Linea FGH, conueiens cum CB eductâ in H Puncto (quod conuenire sit necesse, facilè probari potest.) Et tandem ex H Puncto, per Centrum Circuli A, agatur HAL, secans BG, in I, & Circulum in K, Punctis. Dico quòd HI, erit Æqua-



ſis Semidiametro KA, & quòd Proportionales erunt KL, HB, HK, BC.

Conſtructio itaque hęc prorſus Euclidea eſt, & Demõſtratio ſic procedit. Ducatur BM, Parallela HL, & à Puncto K, altera KP Parallela DA. Deinde à Puncto P, adhùc PO Æquidiſtans HL. Factâ hac pręparatione, Triangula BIH, POD, ſunt inter ſe, & toti Triangulo AHD Æquiangula, & Similia, ex vi Parallelarum, quod facile euinci poteſt. Si verò iungatur KM, fiet Æquidiſtans DH, & iterùm Triangulum AKM, tribus illis iam dictis Simile fiet. Sed in Parallelogrammo DMKP, Latera ex aduerſo æqualia ſunt pariter & in altero Parallelogrammo BMKH. Igitur Latus HB, Æquale euadit Lateri DP: vtrumque enim Lateri KM æquale eſt. Et cùm tria Triangula HBI, DPO, KMA, ſint Similia, Latera eorum erunt Homologa, & æqualia, ſcilicet HB, PD, KM. Ergò & reliqua Homologa erunt Æqualia Latera, id eſt HI, PO, KA. Sed KA, eſt Semidiameter Cir-

culi. Ergò HI, ipſi Semidiametro KA, vel BA Æqualis. Quare à Puncto A, extrà ducta eſt Linea AH, & Pars eius HI, intercepta à duabus Lineis BG, BH, Æquatur Semidiametro. Et hoc Geometricè inſtauratum, erat Demonſtrandum: Quod Vieta, Herigonius, & alij per Poſtulatum, ſiue Mechanicè deducebant.

Et in ſequentibus pro Complemento aſſumptæ Propoſitionis, Authores illi ſecundum Geometrię Regulas procedunt, dicunturProportionales eſſe continuè KL, BH, KH, BC: quarum Extremæ KL, BC, fuerant Datæ, reliquę duę inuentę, & quidem Geometricè BH, HK. Quoniam enim DA, BG, Parallelę ſunt conſtructæ, ideò eſt HI, ad HB: ita AI, ad DB. Eſt autem HI, ad KL: ſicut BC, ad BD, Simpli ad Duplum. Quare eſt vt KL, ad HB: ita AI, ad BC. Ipſi autem AI, addatur HI, & auferatur KA, quas Æquales eſſe Demóſtrauimus. Igitur à Puncto H, extra Circulum ſumpto, ſunt duæ Rectę ipſum ſecantes, & quod ſub Exterioribus earumdem Partibus videlicet HB, & HK, fit; Æquale eſt ei Rectangulo quod fit ſub Interioribus Partibus KL, & BC. Ergò Exteriores Partes permutatim acceptę ſunt continuè Proportionales, nimirùm KL, HB, HK, BC Datis igitur Duabus Extremis Lineis Z, & X, Duę ſunt Medię in Analogiâ Continuâ inuentę. Quod erat faciendum.

ADNOTATIO.

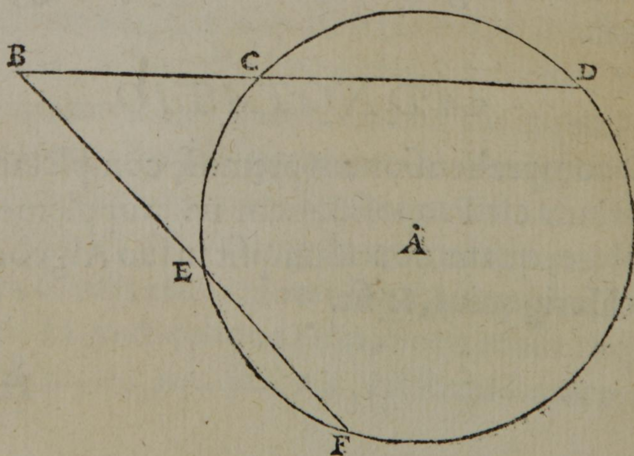
AD comprehenſionem pręmiſſę completam, neceſſarium eſt Propoſitionem IV. Supplementi Vietę ſubnectere, quam non aſſumpſit in ſuo Algebrę Supplemento Herigonius, & ſit.

LEMMA TERTIVM.

Si Duæ Lineæ Rectæ à Puncto extra Circulum eductæ ipsum secent, quod autem fit sub Partibus Exterioribus eductarum, Æquale sit ei quod fit sub Interioribus, Exteriores Partes permutatim sumptæ sunt Proportionales continuè inter Partes Interiores.

SVb A Centro descriptum Circulum secent duæ Lineæ Rectæ à Puncto B, vna quidem in Punctis CD, altera in EF, vnde Exteriores Partes secantium sint BC, BE. Quod autem fit sub BC, BE, Æquale sit ei quod fit sub DC, FE, Interioribus Partibus. Dico inter DC, & FE, Proportionales esse continuè BC, & BE, assumendo eas permutatim, vt videlicet Interiorem Partem primæ secantis, Pars sequatur Exterior secantis secundæ, vel Interiorem Partem secundæ Pars Exterior primæ, nempe esse, vt DC, ad BE: ita BE, ad BC: & ita BC, ad EF.

Quoniam enim id quod fit sub CD, & EF, Æquale est, ex Hypothesi, ei quod fit sub BC & BE: ideò est vt CD, ad BE:



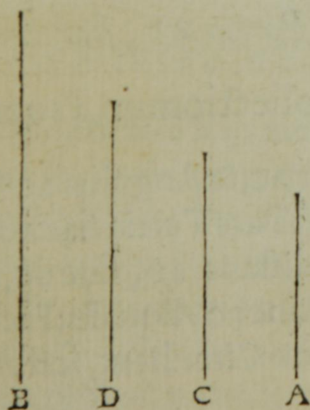
ita BC, ad EF, & per ſynæreſin, vt CD, ad BE: ita BD, ad BF. Sed ex ratione conſtructionis eſt BE, ad BC: ſicut BD, ad BF. Ergò eſt vt CD, ad BE: ita BE, ad BC: & conſequenter BC, ad EF. Quod erat Demonſtrandum.

PROPOSITIO VIGESIMA-SECVNDA.

PROBLEMA DECIMVM-OCTAVVM.

Cubum Duplicare, aut in aliâ quâvis Datâ Ratione exhibere.

DEntur Duę Extremę Lineæ A, B, in Duplâ Ratione, & ex præmiſſis Duę Mediæ in Analogiâ continuâ reperiantur C, D, & cùm ex Elementis habeatur, quæ ratio Extremarum Quatuor Proportionalium in Geometricâ Analogiâ: eadem eſt Solidi ſuper Primam ad Simile Solidum ſuper Secundam. Si igitur A, & B, Extremæ ſint in Duplâ, aut aliâ quâcunque ratione, etiam Cubus ſuper Primam, ad Cubum ſuper Secundam fit in eâdem ratione Duplâ, vel in aliâ Datâ. Cubi namq; ſunt prorſus Similes Solidi. Igitur factum erit quod oportuit: & ſi Extremæ



in diuersâ exponantur Ratione, pariter Solida super Primam, ac Secundam in eâdemmet resultabunt.

ADNOTATIO.

PRoblema hoc illud est toties à multis decantatum, vel pro Glauci Sepulchro, vel pro Arâ, Regis, aut Deliaci Oraculi iussu Duplicandis Propositum: ambo enim erant Figuræ Cubicæ, & illâ eâdem seruatâ nesciuerant Artifices Duplum exhibêre: A Geometriâ namque inuentio Duarum Mediarum petenda erat, & quidem Geometricè. Quod ante nostra hæc pauca, à nemine præstitum fuerat.

Hisce itaque expositis perfecimus ea, quæ initio eramus polliciti, vt patet. Interim vnum, vel alterum subnectemus Problema emendatum: vt deinceps qui nostro fruuntur otio, maiorem ad plura emendanda facilitatem consequantur.

PROPOSITIO VIGESIMA-TERTIA.

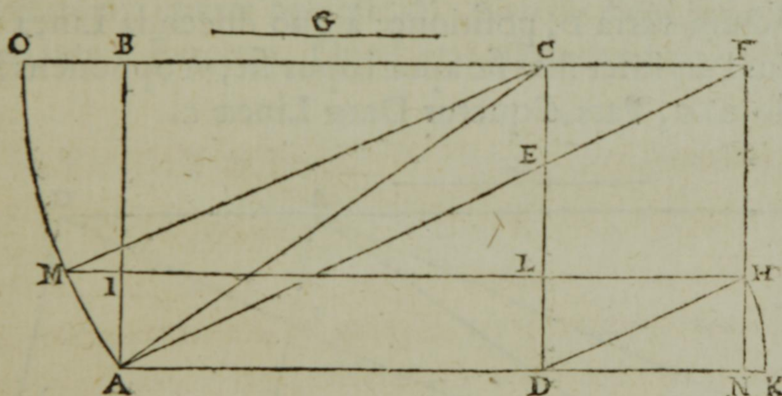
PROBLEMA DECIMVM-NONVM.

Dato Parallelogrammo Rectangulo ABCD, *&* *Externâ Lineâ* G; *oporteat ex Angulo* A, *Rectam ducere Lineam in oppositum Latus* DC, *vt productæ occurrens* BC, *Externa Portio* EF, *fiat æqualis* G *Datæ.*

Est Pappi Libro IV. Collectionum, Propositione XXXJ.

DVcatur Diameter AC, & Angulus ACB, secetur Trifariàm Lineâ MC, vt Pars Tertia fiat ACM, & à Puncto M, ducatur MH, Æquidistans AD, siue BC, & in productâ AD, sumatur DK, Datę Lineę G Æqualis: Facto deinde Centro D, interuallo G, Portio Circuli HK, scribatur occurrens

Lineæ MH, in Puncto H, & ab eodem ducatur FHN Parallela Lateribus AB, DC, quam cum BC productâ, conuenire manifestum est: concursus sit in F Puncto, & iuncta AF, secans DC in E. Dico quòd EF, Æqualis est G, & efficit Problema. Compleatur Figura ABFN, cuius Diameter AF, & Æqualis illi altera BN, Triangula CEF, DLH, sunt Æquiangula: quod quidem ratione Parallelarum facilè probabitur. At in Quadrilatero DEFH, Duo Latera DE, HF, Æqualia sunt: sicut & in altero CFHL, Duo FH, CL. Igitur & DE, & CL, Æqualia erunt. Ideóque in ijsdemmet Triangulis CEF, LDH, Latera erunt omnia sibi inuicem respondentia, æqualia: & EF, ipsi G, æqualis fiet. Quod erat Demonstrandum.



ADNOTATIO.

PRæmissa Demonstratio alijs medijs posset institui: At nos breuitati studentes omittimus. Cæterùm Pulcherrimum hoc Problema per Solida, scilicet Conicas Sectiones, Pappus demonstrauit: adeò vt in D Puncto, Vertex Hyperboles describendæ fieret, cuius Asymptoti AB: BC, Et per 12^{am}. Libri Secundi Apollonij, complementorum AL, CE, probat æqualitatem. At verè in Plano

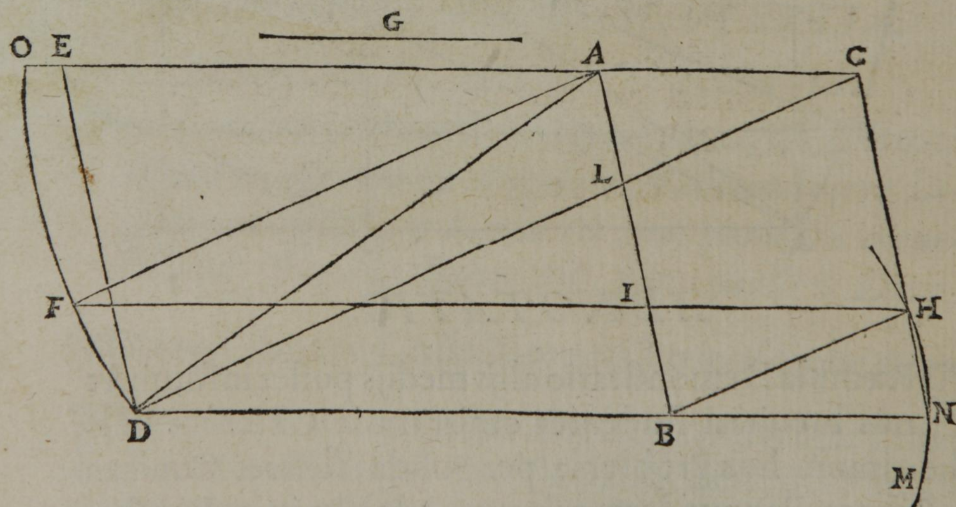
Conicæ Sectiones describi Geometricè simpliciter non conceduntur: Nostra autem constructio omnem rejicit scrupulum, vt patet: & ex hac Propositione, Vietæi Postulati Geometrica ostendetur Effectio, vt sequitur.

PROPOSITIO VIGESIMA-QVARTA.

PROBLEMA VIGESIMVM.

Datis Duabus Lineis Rectis Angulum quemcunque facientibus, & positione Puncto extrà, Datâ etiam Lineâ Magnitudine possibili, hanc inter Datas Lineas à Puncto Geometricè aptare.

SInt Lineæ AB, AC, Angulum BAC efficientes, & Punctum extrà D, positione: à quo ducenda Linea sit, cuius Pars inter illas sic aptari opus sit, vt opponens Angulo BAC, Pars Æquetur Datæ Lineæ G.



Ducantur à Puncto D, Parallelæ DB, DE, ipsis AC, AB: ducatur etiam DA. Et Angulus DAE, diuidatur Trifariàm, vt suprà abundè Demonstratum est. Et Pars Tertia

tia fiat Angulus, Arcui DF, competens: & à Puncto F, ducatur FH, Parallela ipsis AC, siue DB: & Centro facto B, cum interuallo Datæ G, Portio Circuli scribatur MH, quam ipsa FH, in Puncto H intercipiat, à quo Puncto H, fiat CHN, Parallela ipsi AB, quæ quidem in productam EA, occurrat in C. Ducatur deinde ex D, in C Punctum, Linea DC, cuius Pars CL, quæ Angulo CAL, subtenditur, erit Æqualis G Datæ Lineæ: nam inter Parallelas AB, CH, super eâdem Basi Duo sunt Parallelogrammata ACHI, LCHB, Æqualia cùm necessariò sint, à quibus si quod illis commune est Trapezium CLIH, auferri intelligatur, relinquentur Triangula Duo ACL, IHB, Æqualia: quæ etiam, vt ex ipsa Constructione patet, Æquiangula sunt. Latera igitur eorumdem Homologa, Æqualia erunt: hoc est, CL Æqualis fiet Lineæ BH, siue Datę G Externæ. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VIGESIMA-QVINTA.

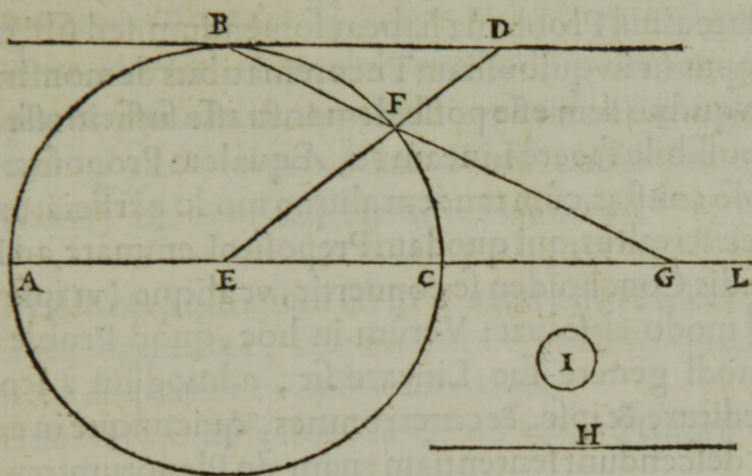
PROBLEMA VIGESIMVM-PRIMVM.

Circulo Dato, & Lineâ Rectâ Tangente Circulum: poßibile eſt à Centro Circuli ducere Rectam ad Tangentem, ita vt quæ Recta fuerit inter Tangentem, & Circuli Circumferentiam, ad Radium Circuli, Minorem Rationem habeat, quàm Circumferentia Circuli, quæ eſt inter Contactum, & Productam ad Datam cujuſcunque Circuli Circumferentiam.

Eſt Archimedis Libro de Spiralibus, Propoſitione V.

DEtur Circulus ABC, qui tangatur Lineâ BD, in B. Detur autem, & Circellus I. Ducatur per E Centrum, Linea AEL, Æquidiſtans BD, & ſit Linea H, maior Circuli Peripheriâ I: tum à puncto B, Contactus trajiciatur BFG, occurrens Lineę AL, ita vt Pars FG, quæ cadit intra Convexum Circuli, & eductam Diametrum Æquetur ipſi H. Denique à Centro E, per F, egrediatur Linea EFD, incidens in Tangentem. Dico Lineam FD, inter Tangentem, & Circuli Circumferentiam eſſe ad Radium FE, in Minori Ratione, quàm Arcus BF, ad Circuli I, Circumferentiam. Anguli enim ad F, qui ad Vertices ſunt Æquales: Tum alterni DBF, EGF. Proinde Triangula BFD, EFG, Æquiangula ſunt, & Latera Proportionalia habent: ita vt DF, ſe habeat, ad FB: vt FE, ad FG: & viciſſim DF, ad FE: vt BF, ad FG: Habet autem BF, ad FG Minorem Rationem, quàm

Arcus FB, ad eandem FG, quia Recta Minor est Arcu quem subtendit. Ergò DF, ad FE, est in Minori Ratione, quàm Arcus BF, ad FG, seu ad Æqualem H. Atqui H, Maior est Peripheriâ Circuli I.



Et ex consequenti Arcus BF, adhùc Maiorem habet Rationem ad Dati Circuli I, Circumferentiam, quàm DF, ad FE. Et hoc erat demonstrandum.

ADNOTATIO.

INter limites consisteret Geometriæ, Problema hoc, si à Puncto B, in eductam Diametrum ita collocaretur FG, vt Æqualis fieret Datę H. At in eiusmodi Effectione diminutus Author nobis est, ibi tamen aliquid ampliùs extare debuerat, quod nos latet. Eutocij Scholia non habentur : Et Eruditissimus Fridericus Commandinus, qui Commentatoris partes susceperat, hæc, vel tantâ dissimulatione pertransijt; quod quidem mirum videtur, ex eo quòd ingenuus, & accuratus vbique visus fuerit. Successit Elegantissimus

David Rivaltus à Flurantiâ qui eadem recognouit, & in Scholio huius Propoſitionis, hæc adnotauit;

Lineare eſt hoc Problema, nec verè Geometricè ſoluitur, ſed quidem Mechanicè: verùm hoc viſum eſt eſſe ſatis Archimedi: cùm non in ſequentibus, hoc Problemate aliud Problema habeat ſoluendum, ſed ſibi tantùm opus ſit in quibuſdam Theorematibus demonſtrandis, in quibus rem eſſe poſſe, demonſtraſſe ſufficit: eſſe autem poſſibile facere Lineam FG, Æqualem Propoſitæ H, liquidò conſtat, cùm tandem aliquo modo perficiatur.

Hæc Rivaltus, qui quodam Prepoſito Lemmate, ad Nicomedis Conchoïden ſe conuertit, vt aliquo (vt ipſe aſſerit) modo abſoluat: Verùm in hoc, quòd Problema eiuſmodi genere ſuo Lineare ſit, admodùm à ſcopo digreditur, & ipſe, & cæteri omnes, quicunque in eandem deſcendunt ſententiam: nam de Planorum omninò familiâ illud eſt, vt planiſſimè oſtendimus. Quòd autem hactenus ab alijs non ſit Geometricè ſolutum in integrum, veriſſimum quidem eſt: At per partes, iam effecerat Vitellio, in ſuo Optices Theſauro ad Propoſitionem 128. Primi Libri, & in caſu eodem quo vtitur Archimedes, ſcilicet Puncto Dato in Vertice Quadrantis. Quod & adnotauerat etiam Commandinus ad Propoſitionem 30. Libri Quarti Collectionum Doctiſſimi Pappi. Defecerat deinde Vitellio ad eiuſdem Libri Propoſitionem 130. dum generaliter illud idem tentaſſet tradere. At nulla interim, inquam, videbatur ad ſoluendum Geometricè repugnantia, & apud Archimedem extitiſſe Methodum fas eſt cenſeri, & modò ex noſtris abundè habebunt harum ſtudioſi ſuperiùs.

Cæterùm cùm Vieta ſuum Geometriæ Supplementum claudat, & nos verbis ijſdem conceptis claudere conuenit.

CONSECTARIVM GENERALE.

Generaliter id verum eſt, opere ſaltem alterutro, vel conſtructionis Duarum Mediarum continuè Proportionalium inter Datas, vel Sectionis Anguli in Tres Partes Æquales, omnia Problemata, alioqui non ſolubilia, explicari, in quibus Cubi Solidis, vel Quadrato-quadrata Plano-planis ſine adfectione, vel cum adfectione adæquantur.

ENimverò oſtenſum eſt in Tractatu de Æquationum Recognitione, Æquationes Quadrato-quadratorum ad Æquationes Cuborum reduci.

Cubos verò adfectos ſub Quadrato, ad Cubos adfectos ſub Latere.

Rurſùs, adfectos Cubos, ſub Latere reduci ad Cubos Puros.

Adfectos verò Cubos, ſub Latere negatè, ita demùm reduci ad Puros, cùm Solidum, à quo adficitur Cubus, negatur de Cubo, & prętereà Triens Plani coëfficientis, cum Latere adficiens Solidum cedit Quadrato Semiſſis Latitudinis oriundæ ex adplicatione adfecti Cubi, ad prædictum Trientem.

In Cubis igitur Puris, vtpotè cùm A, de quâ quęritur, Cubus proponitur Æquari B Quadrato in D, intelligentur B, & D, Extremæ in ſerie Quatuor continuè Proportionalium, & harum A, de quâ quæritur eſſe Secunda.

In Cubis autem ita adfectis, ſub Latere negatè, vt Triens Plani coëfficientis, cum Latere adficiens Solidum præſtet Quadrato Latitudinis Semiſſis oriundæ ex

adplicatione adfecti Cubi ad prædictum Trientem, vtpotè, cùm A Cubus, Minùs B Quadrato, Ter in A, proponitur Æquari B Quadrato, in D Bis, & B præstat ipsi D. Duo intelligentur proponi Triangula Æquicrura, & ipsa Cruribus Æqualia alterum alteri, quorum Secundi Angulus, qui est ad Basim, intelligitur Triplus ad Angulum, qui est ad Basim Primi, & Basis Secundi esse D: Crus verò B. A autem de quâ quæritur, esse Basis Primi.

In Cubis denique ita adfectis, vt ipsi de adficiente Solido negantur, vtpotè, cùm B Quadratum Ter in E, Minùs E Cubo Æquabitur B Quadrato in D Bis, Eâdem stante constructione, quæ in ancedente Formulâ exposita est, E, de quâ quęritur, fiet Basis Dimidia Primi, multatâ, continuatâve Longitudine eius, cuius Quadratum Æquale est Triplo Quadrato Altitudinis Primi.

Quòd enim in Triangulo Æquicruro Crus semper Maius sit Base Dimidiâ, vel ex eo euidens fit, quòd Altitudo secet Basim Bifariàm. Itaque Cruris Quadratum præstat Quadrato Dimidiæ per ipsius Altitudinis Quadratum.

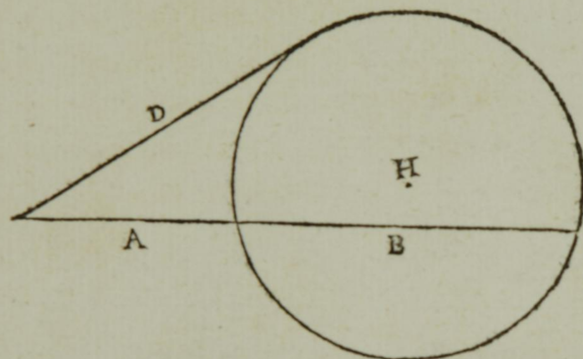
Atque adeò Duobus Problematis Æquationes Cuborum omnes, & Quadrato-quadratorum cuiuscunque adfectionis alioqui non solubiles explicabuntur, vnâ inuentione Duarum Mediarum inter Datas, alterâ Anguli Dati in Tres Æquales Partes Sectione. Quod animaduertisse fuit operæ-pretium.

APPENDIX.

PROBLEMA.

Si adplicanda ſit in Circulo Linea non Maior Diametro, à Puncto Dato Extrà.

POnatur Circulus, cuius Centrum H, Linea in eo ducenda Intrà Æqualis, B; quæ Diametrum non excedat, à Puncto Extrà Dato.



Agatur Tangens Circulum, ſitque D, quæ Media in ſerie Proportionalium Trium continuè ponatur; quarum Differentia ſit B Data Linea. Et inuentis Extremis, Maior ſit A B. Factum erit quod oportuit. Nam A B, D, A, erunt Proportionales. Demonſtratio ex ipſis Elementis ſtatim habetur.

FINIS.



KONSERVIERT DURCH
ÖSTERREICHISCHE FLORENZHILFE
WIEN 1967